PEMBANGKIT RANDOM VARIATE

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan (1)

- Sifat probalitistik pada sistem nyata mempunyai pola distribusi probabilistik tertentu.
- Distribusi probabilistik tersebut akan memberikan gambaran bagaimana sebenarnya pola munculnya ketidakpastian dari sistem nyata.
- Dalam simulasi komputer, penggambaran fenomena probabilistik dengan pola-pola tersebut dapat digambarkan dengan menggunakan variabel acak yang mempunyai pola distribusi seperti yang diinginkan.

Pendahuluan (2)

- Variabel acak yang mempunyai pola distribusi tertentu dapat diperoleh dengan cara :
  1. Membangkitkan bilangan acak U(0,1)
  2. Transformasikan bilangan acak tersebut ke suatu distribusi probabilitas tertentu, sehingga diperoleh variabel acak yang berdistribusi tertentu pula.

- Metode transformasi invers merupakan metode transformasi bilangan acak yang umum digunakan.

Transformasi Invers

- Jika diinginkan variabel acak X dari sebuah distribusi (umumnya distribusi kontinyu) dan mempunyai fungsi kerapatan (Probability Density Function/PDF).

- Algoritma untuk membangkitkan variabel acak X yang punya distribusi F adalah :
  1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
  2. Hitung $X = F^{-1}(U)$

     dimana $F^{-1}(U)$ akan selalu memenuhi selagi $0 \le U \le 1$ dan rentang dari F adalah [0,1] atau $0 \le F(X) \le 1$

Contoh 1

Membangkitkan random variate yang berdistribusi kontinyu dengan fungsi sbb :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fungsi distribusi kumulatifnya (Cummulative Distribution Function/CDF) :

$$F(x) = \int f(x).dx$$

$$= \int_0^x 2x.dx$$

$$= x^2$$

Untuk mendapatkan F^{-1}, diambil :

$$U = F(x)$$

$$U = x^2$$

$$x = \sqrt{U} \rightarrow \text{Jadi } F^{-1}(x) = \sqrt{U}$$

Maka algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi kontinyu seperti di atas adalah :

1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
2. Dapatkan $x = \sqrt{U}$

Jika diasumsikan bilangan random dibangkitkan dengan metode LCG, dengan ketentuan a = 19, c = 237, m = 128, dan Z_0 = 12357.
Maka diperoleh bilangan acak sebagai berikut :

Z_1 = (19 * 12357+237) mod 128 = 12 → U_1 = 0,0938

Z_2 = (19 * 12+237) mod 128 = 81 → U_2 = 0,6328

Z_3 = (19 * 81+237) mod 128 = 112 → U_3 = 0,8750

Z_4 = (19 * 112+237) mod 128 = 61 → U_4 = 0,4765

Z_5 = (19 * 61+237) mod 128 = 116 → U_5 = 0,9063

Maka diperoleh variabel acak :

$$x_1 = \sqrt{U_1} = 0,3062$$

$$x_2 = \sqrt{U_2} = 0,7955$$

$$x_3 = \sqrt{U_3} = 0,9354$$

$$x_4 = \sqrt{U_4} = 0,6903$$

$$x_5 = \sqrt{U_5} = 0,9520$$

Jika dicari rata-ratanya :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$

$$= 0,7359$$

Contoh 2

Misalkan x mempunyai distribusi eksponensial dengan mean β, maka fungsi distribusinya adalah :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, untuk\ x \geq 0 \\ 0 \quad , untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

Maka CDF-nya :

$$F(x) = \int f(x).dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}.dx$$

$$= 1 - e^{-x/\beta}$$

$$U = F(x)$$

$$U = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$1 - U = e^{-x/\beta}$$

$$\ln(1-U) = \ln\left(e^{-x/\beta}\right)$$

$$\ln(1-U) = -\frac{x}{\beta}$$

$$x = -\beta \ln(1-U)$$

Karena (1-U) dan U diambil dari distribusi yang sama U(0,1), maka dimungkinkan sekali mengganti (1-U) dengan U untuk U antara 0 dan 1.

Jadi F-1(x) = - β ln (1-U) = - β ln U

Dengan demikian, algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi eksponensial :

1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
2. Dapatkan $x = -\beta \ln U$

Dalam distribusi eksponensial diketahui bahwa :

$$1/\beta = \lambda$$

maka

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Jika x merupakan waktu pelayanan t, maka untuk $t > 0$:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Sehingga diperoleh :

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln U$$

- Metode tranformasi invers dapat juga digunakan jika x adalah diskrit.

- Diasumsikan bahwa x berharga x_1, x_2, x_3, x_4, ... dimana $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ...., maka algoritmanya adalah :
  1. Bangkitkan bilangan random U(0,1)
  2. Tetapkan bilangan integer positif i terkecil sedemikian rupa bahwa $U \leq F(x_i)$ dan
  3. Dapatkan $X = x_i$

Contoh

Membangkitkan lima variabel acak yang berdistribusi diskrit uniform, jika diasumsikan bilangan acak dibangkitkan dengan metode multiplicative RNG dengan a = 77, m = 127, Z_0 = 12357, i = 40, dan j = 100.

Fungsi distribusi dari massa probabilitas distribusi diskrit uniform adalah :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{j - i + 1}, i \le x \le j + 1 \\ 0 \quad , x \; lainnya \end{cases}$$

Maka CDF-nya :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{j-i+1} dx = \frac{x-i}{j-i+1}$$

$$U = F(x)$$

$$U = \frac{x-i}{j-i+1}$$

$$x = i + (j-i+1)U$$

Jadi : $F^{-1}(x) = i + (j-i+1)U$

Maka algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi diskrit uniform adalah :

1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
2. Tentukan nilai i dimana i adalah integer dan i ≤ j
3. Bangkitkan x = i + (j – i + 1)U

Maka diperoleh deret bilangan acak sbb :

$Z_1 = (77 * 12357) \bmod 127 = 5 \rightarrow U_1 = 0{,}0394$

$Z_2 = (77 * 5) \bmod 127 = 4 \rightarrow U_2 = 0{,}0315$

$Z_3 = (77 * 4) \bmod 127 = 54 \rightarrow U_3 = 0{,}4252$

$Z_4 = (77 * 54) \bmod 127 = 94 \rightarrow U_4 = 0{,}7402$

$Z_5 = (77 * 94) \bmod 127 = 126 \rightarrow U_5 = 0{,}9921$

Dan diperoleh deret variabel acak sbb :

$X_1 = 40 + 0{,}03937\ (100 - 40 + 1) = 42{,}4016 \approx 42$

$X_2 = 40 + 0{,}0315\ (100 - 40 + 1) = 40{,}5 \approx 41$

$X_3 = 40 + 0{,}4252\ (100 - 40 + 1) = 65{,}937 \approx 66$

$X_4 = 40 + 0{,}74021\ (100 - 40 + 1) = 85{,}152 \approx 85$

$X_5 = 40 + 0{,}9921\ (100 - 40 + 1) = 100{,}518 \approx 100$

Beberapa Algoritma Pembangkit Variabel Acak

Distribusi	Parameter	Algoritma
Bernoulli	p	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Jika U ≤ p maka dapatkan X=1 & jika tidak X = 0
Geometric	p	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Dapatkan X = ln(U)/ln(1-p)
Uniform	a, b	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Dapatkan X = a+(b – a)U
Weibull	α, β	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Hitung X = β (- ln (U))

Pembangkit Variabel Acak Distribusi Normal

- Distribusi normal sulit dianalisis dengan integral secara langsung, maka membangkitkan variabel acaknya dilakukan dengan pendekatan central limit theorem karena ukuran sampel yang besar akan berdistribusi normal atau dianggap berdistribusi normal.

- Untuk menghasilkan variabel acak yang berdistribusi standar normal dengan rata-rata μ dan standar deviasi σ, maka algoritmanya :
  1. Bangkitkan bilangan acak $U_i(0,1)$ dan $U_{i+1}(0,1)$
  2. Hitung nilai $Z=(-2\ln U_i)^{1/2}\cos(2\pi U_{i+1})$ atau $Z=(-2\ln U_i)^{1/2}\sin(2\pi U_{i+1})$
  3. Hitung $X = \mu + \sigma Z$

Pembangkit Variabel Acak Distribusi Poisson

- Distribusi poisson memiliki kaitan erat dengan distribusi eksponensial, sering digunakan pada simulasi yang berhubungan dengan kedatangan dan kepergian suatu peristiwa.
- Perlu diketahui bahwa jika waktu antar kejadian berdistribusi eksponensial maka jumlah kejadian yang terjadi pada selang waktu tertentu akan berdistribusi poisson. Distribusi ini memiliki densitas peluang :

$$F(x) = \frac{\lambda t^{x} e^{-\lambda t}}{x}$$

- Distribusi poisson memiliki prosedur pelaksanaan pembangkitan variabel random yang dilakukan berturut-turut berdasarkan distribusi uniform dari U(0,1) sampai pertidaksamaan terakhir terpenuhi.
- Algoritmanya :
  1. Hitung $F = e^{-\lambda}$
  2. Tentukan I = 1
  3. Bangkitkan bilangan random $U_i(0,1)$
  4. Jika I = 1 maka $P = U_I$, jika tidak hitung $P = P * U_i$
  5. Jika P < F maka hitung X=I–1 dan kembali ke tahap 2, jika tidak hitung I = I + 1 dan kembali ke tahap 3.