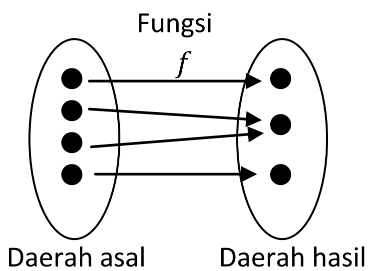
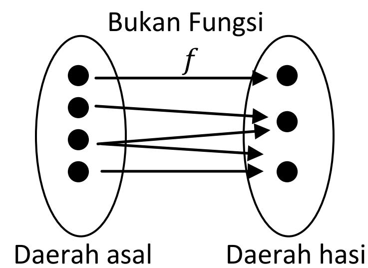
FUNGSI DAN GRAFIK

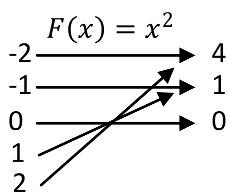
1.1 Pendahuluan

Definisi fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut **daerah hasil** fungsi tersebut.





1.2 Daerah asal dan daerah hasil fungsi



Daerah asal adalah himpunan elemen-elemen pada mana fungsi itu mendapat nilai. Notasi D_f, yaitu $D_f = \{x \in R | f(x) \in R\}$.

Daerah hasil adalah himpunan nilai-nilai yang bersesuaian dengan daerah asal. Notasi R_f, yaitu $R_f = \left\{f(x) \in R \middle| x \in D_f\right\}$

Misalkan $F(x) = x^2$ jika daerah asalnya adalah $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ maka daerah hasilnya adalah $\{0, 1, 4\}$

Contoh:

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari:

1. $g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

3. $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Jawab:

1. Karena fungsi $g(x)$ selalu terdefinisi untuk setiap x maka
   $D_g = \{x \in R\}$
   $= (-\infty, \infty)$
   $g(x) = x^2 - 1 \rightarrow R_g$
   $= [-1, \infty)$
2. Agar $f(x) \in \mathbb{R}$, syaratnya adalah $x - 3 > 0$ maka

$D_f = \{x \in R | x > 3\} = (3, \infty)$
Karena $\sqrt{x-3} > 0$, maka untuk $x > 3 \rightarrow R_f = (0, \infty)$

3. Karena penyebutnya berbentuk kuadrat, maka nilai $h(x)$ terdefinisi untuk setiap nilai x. Ini mengakibatkan daerah asal fungsi h adalah $D_h = (-\infty, \infty)$.
   Untuk menentukan daerah hasilnya misal $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ maka dapat dibentuk
   $$y(1 + x^2) = x^2 \leftrightarrow (y - 1)x^2 + y = 0$$
   Karena fungsi h bernilai real, maka persamaan kuadrat ini harus mempunyai akar real, yang syaratnya adalah diskriminan $D \geq 0$. Ini memberikan
   $$-4y(y - 1) \geq 0 \leftrightarrow y(y - 1) \leq 0 \leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$$
   Maka $R_h = [0,1)$

Operasi Fungsi

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ daerah asalnya $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ daerah asalnya $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ daerah asalnya $D_{fg} = D_f \cap D_g$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, daerah asalnya $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

Contoh

Jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$ dengan masing-masing daerah asal $(-\infty, \infty)$ dan $(3, \infty)$. Cari rumus untuk $f + g, f - g, f.g, \frac{f}{g}$ dan berikan daerah asalnya.

Jawab:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \frac{2}{\sqrt{x-3}}, D_{f+g} = (3, \infty)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \frac{2}{\sqrt{x-3}}, D_{f-g} = (3, \infty)$
3. $(f.g)(x) = f(x).g(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x-3}}, D_{fg} = (3, \infty)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\frac{2}{\sqrt{x-3}}} = \frac{x^2\sqrt{x-3}}{2}, D_{f/g} = (3, \infty)$

1.3 Definisi fungsi komposisi

Komposit f dengan g adalah jika g bekerja pada x menghasilkan $g(x)$ dan kemudian f bekerja pada $g(x)$ untuk menghasilkan $f(g(x))$ dinyatakan $(f \circ g) = f(g(x))$. Syarat yang harus dipenuhi agar $f \circ g$ ada (terdefinisi) adalah $R_g \cap D_f \neq \emptyset$.
Dalam komposisi $f \circ g \neq g \circ f$

Contoh:

Diketahui $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$, tentukan $(f \circ g)(x), (g \circ f)(x)$

Jawab

Untuk menentukan $(f \circ g)(x)$ada maka

$f(x) = x^2 \to D_f = (-\infty, \infty), R_f = [0, \infty)$

$g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}} \to D_g = (3, \infty), R_g = (0, \infty)$

$R_g \cap D_f = (0, \infty)$

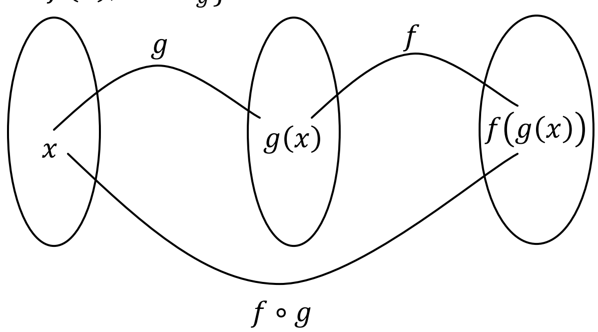
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{2}{\sqrt{x-3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{x-3}}\right)^2 = \frac{4}{x-3}$$

Untuk menentukan $(g \circ f)(x)$ada maka $R_f \cap D_g = (3, \infty)$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \frac{2}{\sqrt{x^2-3}}$$

1.4 Daerah asal dan hasil fungsi komposisi

Daerah asal $f \circ g$, $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$. Daerah hasil $f \circ g$, $R_{f \circ g} = \{y \in R_f | y = f(x), x \in R_g\}$.



Contoh:

Diketahui $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$, tentukan $D_{f \circ g}$ dan $R_{f \circ g}$

Jawab:

$f(x) = x^2 \to D_f = (-\infty, \infty), R_f = [0, \infty)$

$g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}} \to D_g = (3, \infty), R_g = (0, \infty)$

Daerah asal $f \circ g$, $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \left\{x \in (3, \infty) \middle| \frac{2}{\sqrt{x-3}} \in (-\infty, \infty)\right\} = (3, \infty)$

Daerah hasil $f \circ g$, $R_{f \circ g} = \{y \in R_f | y = f(x), x \in R_g\} = \{f(x) \in [0, \infty) | x \in (0, \infty)\} = (0, \infty)$

1.5 Penggambaran grafik fungsi

1.5.1 Sistem Koordinat

Sistem koordinat kartesis terdiri dari dua sumbu, garis horizontal (sumbu x) dan garis vertikal (sumbu y) yang berpotongan tegak lurus di titik O.

1.5.2 Grafik Fungsi

Misal $y = f(x)$, himpunan titik $\{(x, y) | x \in D_f, y \in R_f\}$ disebut grafik fungsi f.

Secara umum cara menggambar grafik fungsi:

1. Tentukan beberapa titik koordinat yang memenuhi fungsi
2. Gambar dalam sistem koordinat
3. Hubungkan dengan menggunakan kurva halus

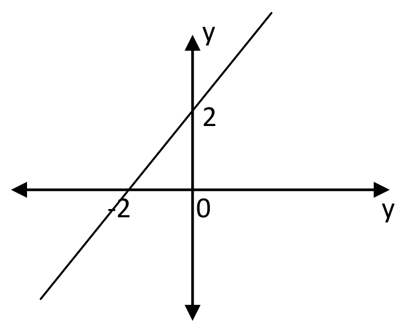
1.5.2.1 Grafik Fungsi Linier

Bentuk untuk fungsi linier: $f(x) = ax + b, a \neq 0$

Cara menggambar:

1. Tentukan titik-titik potong sumbu x dan sumbu y
2. Gambar dalam sistem koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut menggunakan kurva mulus.

Contoh: Gambarkan grafik $y = x + 2$



Titik potong dengan sumbu x

$y = 0 \leftrightarrow x = -2$
$\rightarrow (-2,0)$

Titik potong dengan sumbu y

$x = 0 \rightarrow y = 2$
$\rightarrow (0,2)$

1.5.2.2 Grafik Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Untuk bentuk umum fungsi kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka diskriminan dari fungsi tersebut

$$D = b^2 - 4ac$$

Pengaruh nilai diskriminan terhadap fungsi:

1. Jika fungsi memiliki diskriminan positif maka fungsi akan memiliki dua akar real
2. Jika fungsi memiliki diskriminan negatif maka fungsi tidak akan memiliki akar real
3. Jika fungsi memiliki diskriminan sama dengan nol maka fungsi akan memiliki akar kembar

Pengaruh nilai a terhadap grafik fungsi:

1. Jika $a > 0$ maka grafik menghadap keatas
2. Jika $a < 0$ maka grafik menghadap ke bawah

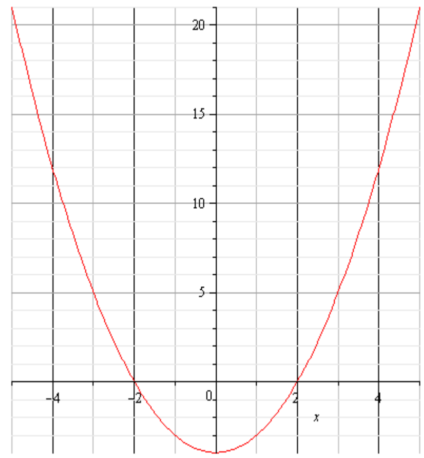
Contoh: Gambarkan grafik $y = x^2 - 4$

Jawab:

a =1

Definit fungsi $f(x)$, $D = 0^2 - 4(1)(-4) = 16 > 0$

Maka grafik akan menghadap keatas dan memiliki dua akar real



Titik potong dengan sumbu x (akar real)

$$y = 0 \leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow x = \pm 2$$

Titik potong dengan sumbu y

$$x = 0 \leftrightarrow y = -4$$

Untuk titik-titik lain

x	-3	-1	1	3
y	5	-3	-3	5

1.6 Jenis-jenis fungsi

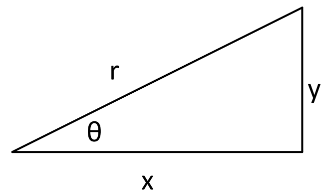
1. Fungsi konstanta
   Bentuk umum: $f(x) = k$, dengan k adalah bilangan real.
2. Fungsi polinom (suku banyak)
   Bentuk umum: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$
   Daerah asal untuk fungsi polinom adalah $x \in R$
3. Fungsi rasional
   Bentuk umum: $\frac{f(x)}{g(x)}$
   Dengan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi polinom dan $g(x) \neq 0$
   Daerah asal untuk fungsi rasional adalah $x \in R$ kecuali untuk x pembuat nol penyebut.
4. Fungsi genap dan fungsi ganjil
   Fungsi genap: $f(-x) = f(x)$, **contoh**: $f(x) = x^2$
   Fungsi ganjil: $f(-x) = -f(x)$, **contoh:** $f(x) = x$
5. Fungsi periodik
   Fungsi $f(x)$ disebut periodik dengan perioda T jika $f(x + T) = f(x)$, **contoh:** $f(x) = \cos x$ merupakan fungsi periodik dengan perioda 2π karena

$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x$, untuk setiap $x \in R$

Kesamaan trigonometri

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$



$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}$

$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\ \theta}$ $\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\ \theta}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}$

esamaan ganjil-genap $\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\tan(-x) = -\tan x$	**Kesamaan ko fungsi** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	**Kesamaan phytagoras** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
Kesamaan penambahan $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	**Kesamaan sudut ganda** $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	**Kesamaan setengah sudut** $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Kesamaan jumlah $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	**Kesamaan hasilkali** $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$