

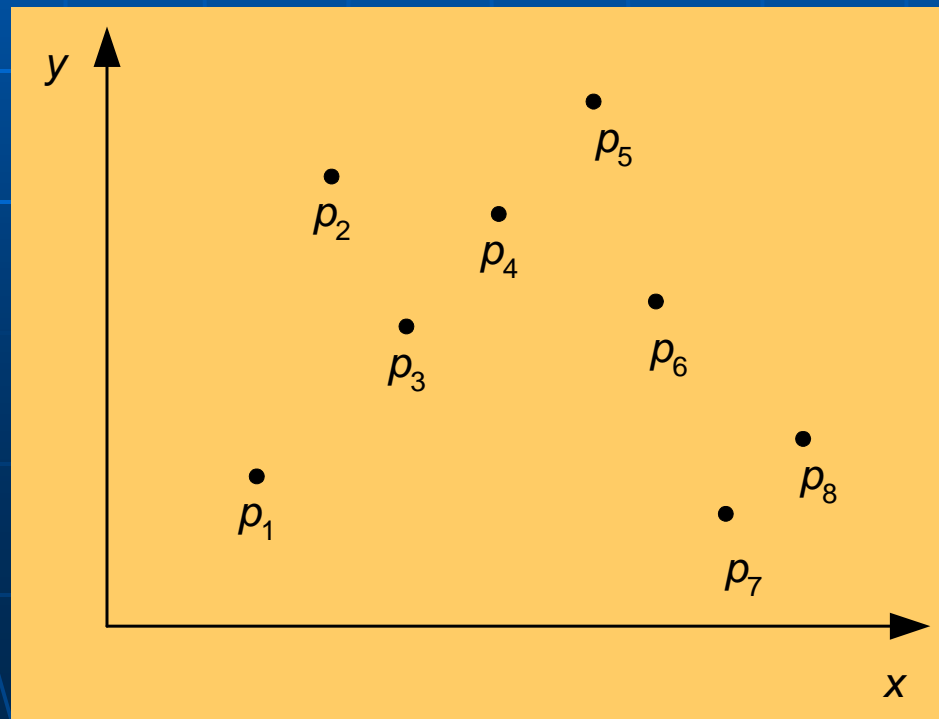
# Algoritma *Brute Force* (lanjutan)



# Contoh lain

## Mencari Pasangan Titik yang Jaraknya Terdekat

**Persoalan:** Diberikan  $n$  buah titik (2-D atau 3-D), tentukan dua buah titik yang terdekat satu sama lain.



- Jarak dua buah titik di bidang 2-D,  $p_1 = (x_1, y_1)$  dan  $p_2 = (x_2, y_2)$  adalah (rumus Euclidean):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Algoritma *brute force*:
  1. Hitung jarak setiap pasang titik.
  2. Pasangan titik yang mempunyai jarak terpendek itulah jawabannya.
- Algoritma *brute force* akan menghitung sebanyak  $C(n, 2) = n(n - 1)/2$  pasangan titik dan memilih pasangan titik yang mempunyai jarak terkecil.

Kompleksitas algoritma adalah  $O(n^2)$ .

```

procedure CariDuaTitikTerdekat(input P : SetOfPoint,
                                n : integer,
                                output P1, P2 : Point)
{ Mencari dua buah titik di dalam himpunan P yang jaraknya
terdekat.
Masukan: P = himpunan titik, dengan struktur data sebagai
berikut
    type Point = record(x : real, y : real)
    type SetOfPoint = array [1..n] of Point
Keluaran: dua buah titik, P1 dan P2 yang jaraknya
terdekat.
}
Deklarasi
    d, dmin : real
    i, j : integer

Algoritma:
    dmin ← -9999
    for i ← 1 to n-1 do

        for j ← i+1 to n do
            d ← √((Pi.x - Pj.x)2 + ((Pi.y - Pj.y)2)
            if d < dmin then          { perbarui jarak terdekat }
                dmin ← d
                P1 ← Pi
                P2 ← Pj
            endif
        endfor
    endfor

```

Kompleksitas algoritma:  $O(n^2)$ .

# Kekuatan dan Kelemahan Metode *Brute Force*

## ■ Kekuatan:

1. Metode *brute force* dapat digunakan untuk memecahkan hampir sebagian besar masalah (*wide applicability*).
2. Metode *brute force* sederhana dan mudah dimengerti.
3. Metode *brute force* menghasilkan algoritma yang layak untuk beberapa masalah penting seperti pencarian, pengurutan, pencocokan *string*, perkalian matriks.
4. Metode *brute force* menghasilkan algoritma baku (standard) untuk tugas-tugas komputasi seperti penjumlahan/perkalian  $n$  buah bilangan, menentukan elemen minimum atau maksimum di dalam tabel (*list*).

## ■ Kelemahan:

1. Metode *brute force* jarang menghasilkan algoritma yang mangkus.
  2. Beberapa algoritma *brute force* lambat sehingga tidak dapat diterima.
  3. Tidak sekonstruktif/sekreatif teknik pemecahan masalah lainnya.
- Ken Thompson (salah seorang penemu Unix) mengatakan: "*When in doubt, use brute force*", faktanya kernel Unix yang asli lebih menyukai algoritma yang sederhana dan kuat (*robust*) daripada algoritma yang cerdas tapi rapuh.

# *Exhaustive Search*

*Exhaustive search* adalah

- teknik pencarian solusi secara solusi *brute force* untuk masalah yang melibatkan pencarian elemen dengan sifat khusus;
- biasanya di antara objek-objek kombinatorik seperti permutasi, kombinasi, atau himpunan bagian dari sebuah himpunan.

- Langkah-langkah metode *exhaustive search*:

1. Enumerasi (*list*) setiap solusi yang mungkin dengan cara yang sistematis.

2. Evaluasi setiap kemungkinan solusi satu per satu, mungkin saja beberapa kemungkinan solusi yang tidak layak dikeluarkan, dan simpan solusi terbaik yang ditemukan sampai sejauh ini (*the best solusi found so far*).

3. Bila pencarian berakhir, umumkan solusi terbaik (*the winner*)

- Meskipun algoritma *exhaustive* secara teoritis menghasilkan solusi, namun waktu atau sumberdaya yang dibutuhkan dalam pencarian solusinya sangat besar.



# Contoh-contoh *exhaustive search*

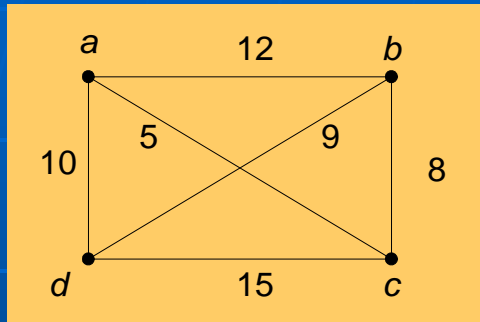
## 1. *Travelling Salesperson Problem (TSP)*

- Persoalan: Diberikan  $n$  buah kota serta diketahui jarak antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) terpendek yang melalui setiap kota lainnya hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.
- Persoalan *TSP* tidak lain adalah menemukan sirkuit Hamilton dengan bobot minimum.

- Algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP:
  1. Enumerasikan (*list*) semua sirkuit Hamilton dari graf lengkap dengan  $n$  buah simpul.
  2. Hitung (evaluasi) bobot setiap sirkuit Hamilton yang ditemukan pada langkah 1.
  3. Pilih sirkuit Hamilton yang mempunyai bobot terkecil.

## ■ Contoh 4:

TSP dengan  $n = 4$ , simpul awal =  $a$



No.	Rute perjalanan ( <i>tour</i> )	Bobot
1.	$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$	$10+12+8+15 = 45$
2.	$a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a$	$12+5+9+15 = 41$
3.	$a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$	$10+5+9+8 = \mathbf{32}$
4.	$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow a$	$12+5+9+15 = 41$
5.	$a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$	$10+5+9+8 = \mathbf{32}$
6.	$a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$	$10+12+8+15 = 45$

Rute perjalananan terpendek adalah

$a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$

$a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$

dengan bobot = 32.

- Untuk  $n$  buah simpul semua rute perjalanan yang mungkin dibangkitkan dengan permutasi dari  $n - 1$  buah simpul.

- Permutasi dari  $n - 1$  buah simpul adalah

$$(n - 1)!$$

- Pada contoh di atas, untuk  $n = 6$  akan terdapat

$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

buah rute perjalanan.

- Jika diselesaikan dengan metode *exhaustive search*, maka kita harus mengenumerasi sebanyak  $(n - 1)!$  buah sirkuit Hamilton, menghitung setiap bobotnya, dan memilih sirkuit Hamilton dengan bobot terkecil.
- Kompleksitas waktu algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP sebanding dengan  $(n - 1)!$  dikali dengan waktu untuk menghitung bobot setiap sirkuit Hamilton.
- Menghitung bobot setiap sirkuit Hamilton membutuhkan waktu  $O(n)$ , sehingga kompleksitas waktu algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP adalah  $O(n \cdot n!)$ .

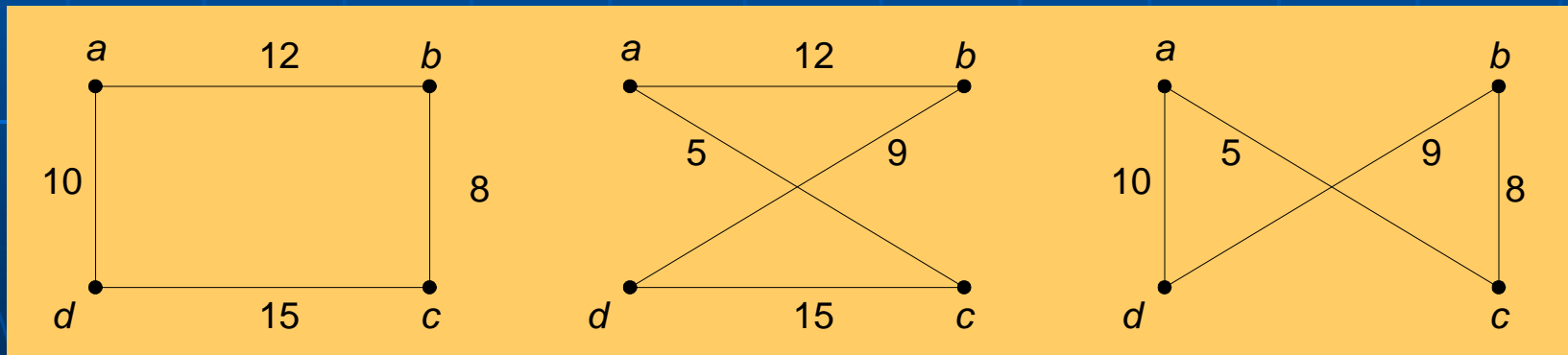
- Perbaikan: setengah dari rute perjalanan adalah hasil pencerminan dari setengah rute yang lain, yakni dengan mengubah arah rute perjalanan

1 dan 6

2 dan 4

3 dan 5

- maka dapat dihilangkan setengah dari jumlah permutasi (dari 6 menjadi 3).
- Ketiga buah sirkuit Hamilton yang dihasilkan adalah seperti gambar di bawah ini:



- Dengan demikian, untuk graf dengan  $n$  buah simpul, kita hanya perlu mengevaluasi sirkuit Hamilton sebanyak  $(n - 1)!/2$  buah.
- Untuk ukuran masukan yang besar, algoritma *exhaustive search* menjadi sangat tidak mangkus.
- Pada persoalan *TSP* misalnya, untuk jumlah simpul  $n = 20$  akan terdapat  $(19!)/2 = 6 \times 10^{16}$  sirkuit Hamilton yang harus dievaluasi satu per satu.



- Sayangnya, untuk persoalan TSP tidak ada algoritma lain yang lebih baik daripada algoritma *exhaustive search*.
- Jika anda dapat menemukan algoritma yang mangkus untuk TSP, anda akan menjadi terkenal dan kaya! Algoritma yang mangkus selalu mempunyai kompleksitas waktu dalam orde polinomial.

## 2. *1/0 Knapsack*

- **Persoalan:** Diberikan  $n$  buah objek dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas bobot  $K$ . Setiap objek memiliki properti bobot (*weight*)  $w_i$  dan keuntungan (*profit*)  $p_i$ .

Bagaimana memilih memilih objek-objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* sedemikian sehingga memaksimalkan keuntungan. Total bobot objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* tidak boleh melebihi kapasitas *knapsack*.

- Persoalan *0/1 Knapsack* dapat kita pandang sebagai mencari himpunan bagian (*subset*) dari keseluruhan objek yang muat ke dalam *knapsack* dan memberikan total keuntungan terbesar.

- Solusi persoalan dinyatakan sebagai vektor  $n$ -tupel:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$x_i = 1$  jika objek ke- $i$  dimasukkan ke dalam *knapsack*,

$x_i = 0$  jika objek ke- $i$  tidak dimasukkan.

Formulasi secara matematis:

$$\text{Maksimasi } F = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq K$$

yang dalam hal ini,  $x_i = 0$  atau  $1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

- Algoritma *exhaustive search* untuk persoalan 0/1 *Knapsack*:
  1. Enumerasikan (*list*) semua himpunan bagian dari himpunan dengan  $n$  objek.
  2. Hitung (evaluasi) total keuntungan dari setiap himpunan bagian dari langkah 1.
  3. Pilih himpunan bagian yang memberikan total keuntungan terbesar.

■ **Contoh:**  $n = 4$ .

$$w_1 = 2; \quad p_1 = 20$$

$$w_2 = 5; \quad p_2 = 30$$

$$w_3 = 10; \quad p_3 = 50$$

$$w_4 = 5; \quad p_4 = 10$$

Kapasitas *knapsack*  $K = 16$

Langkah-langkah pencarian solusi 0/1 *Knapsack* secara *exhaustive search* dirangkum dalam tabel di bawah ini:

Himpunan Bagian	Total Bobot	Total keuntungan
{}	0	0
{1}	2	20
{2}	5	30
{3}	10	50
{4}	5	10
{1, 2}	7	50
{1, 3}	12	70
{1, 4}	7	30
<b>{2, 3}</b>	<b>15</b>	<b>80</b>
{2, 4}	10	40
{3, 4}	15	60
{1, 2, 3}	17	tidak layak
{1, 2, 4}	12	60
{1, 3, 4}	17	tidak layak
{2, 3, 4}	20	tidak layak
{1, 2, 3, 4}	22	tidak layak

- Himpunan bagian objek yang memberikan keuntungan maksimum adalah {2, 3} dengan total keuntungan adalah 80.
- Solusi:  $X = \{0, 1, 1, 0\}$