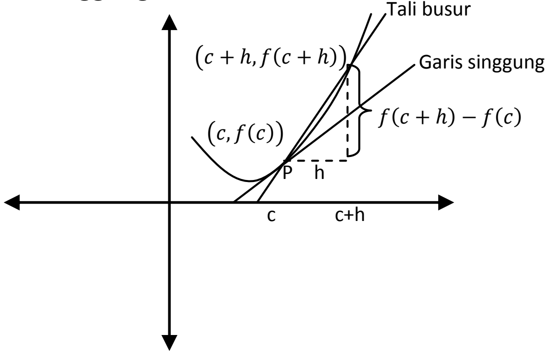
TURUNAN

Ide awal turunan:

Garis singgung



Kemiringan garis singgung di titik P:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limitnya ini ada.

Notasi dari turunan:

1. Notasi aksen, $f'(x)$
2. Notasi d, $D_x y$
3. Notasi Leibniz, $\frac{dy}{dx}$

Contoh:

Andaikan $f(x) = x^2 - x$. Cari $f'(3)$.

Jawab:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(3+h)^2 - (3+h)] - [3^2 - 3]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 5 + h = 5$$

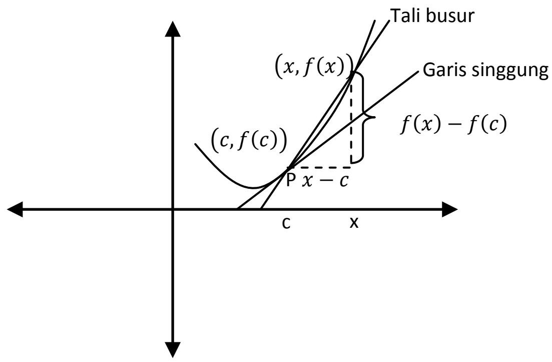
Contoh:

Jika $f(x) = x^3 + 2$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^3 + 2] - [x^3 + 2]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

BENTUK YANG SETARA UNTUK TURUNAN



$$f^{'}(c) = \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{c}}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f^{'}(x) = \lim_{\mathrm{t}\to \mathrm{x}}\frac{f(\mathrm{t}) - f(x)}{\mathrm{t} - x}$$

Contoh:

Andaikan $f(x) = x^2 - x$. Cari $f'(3)$.

Jawab:

$$f^{'}(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{h\to 0}\frac{[x^2 - x] - [3^2 - 3]}{x - 3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3}(x + 2) = 5$$

KETERDIFERENSIALAN MENUNJUKKAN KEKONTINUAN

Jika sebuah kurva mempunyai sebuah garis singgung di sebuah titik, maka kurva itu tidak dapat melompat atau sangat berayun di titik tersebut. Perumusan yang persis dari kenyataan ini merupakan sebuah teorema penting.

Teorema

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c.

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku.

Contoh:

Jika $f(x) = |x|$, tentukan $f'(0)$

Jawab:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Limit ini tidak ada karena

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Sedangkan

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Karena limit kanan dan limit kirinya tidak sama.

Aturan Pencarian Turunan

Fungsi konstanta

Fungsi konstanta $f(x) = k$ mempunyai grafik berupa garis horisontal, sehingga kemiringannya nol dimana-mana.

Teorema (Aturan Fungsi Konstanta)

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$, yakni

$$D(k) = 0$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Teorema (Aturan Fungsi Identitas)

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$, yakni

$$D(x) = 1$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Teorema (Aturan Pangkat)

Jika $f(x) = x^n$, dengan $n \in \mathcal{B}^+$, maka $f^{'}(x) = nx^{n-1}$, yakni

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

Bukti

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)}{h} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^3$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$f'(x) = D(x^3) = 3x^2$$

D ADALAH SEBUAH OPERATOR LINEAR

Teorema (Aturan Kelipatan Konstanta)

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)^{'}(x) = k \cdot Df(x)$, yakni

$$D[k \cdot f(x)] = kDf(x)$$

Bukti

Andaikan $F(x) = kf(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F^{'}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x+h) - k\cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\cdot f'(x) \end{aligned}$$

Contoh:

Jika $f(x) = 10x^{10}$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[10x^{10}] = 10D(x^{10}) = 10(10x^9) = 100x^9$$

Teorema (Aturan Jumlah)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, yakni

$$D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 + 4x + 4$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[x^2 + 4x + 4] = D(x^2) + 4D(x) + D(4) = 2x + 4$$

Teorema (Aturan Selisih)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$, yakni

$$D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 - 4x$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[x^2 - 4x] = D(x^2) - 4D(x) = 2x - 4$$

Teorema (Hasil kali)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x)$, yakni

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = 3x(x^2 + 2)$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[3x(x^2 + 2)] = 3xD(x^2 + 2) + (x^2 + 2)D(3x) = 3x(2x) + (x^2 + 2)3 = 6x^2 + 3(x^2 + 2)$$

Teorema (Aturan Hasilbagi)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, yakni

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

Contoh:

Jika $f(x)=\frac{1}{3x^2+1}$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D\left(\frac{1}{3x^2+1}\right)=\frac{(3x^2+1)D(1)-1D(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}=\frac{(3x^2+1)0-(6x)}{(3x^2+1)^2}=\frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$$

TURUNAN SINUS DAN KOSINUS

Jika $f(x)=\sin x$, tentukan $f'(x)$

$$\begin{aligned}D(\sin x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(-\sin x\frac{(1-\cos h)}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right)=-\sin x\left[\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right]+\cos x\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right]\end{aligned}$$

Ingat bahwa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

Maka

$$D(\sin x)=-\sin x\,(0)+\cos x\,(1)=\cos x$$

Jika $f(x)=\cos x$, tentukan $f'(x)$

$$\begin{aligned}D(\cos x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}-\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)-\sin x\frac{\sin h}{h}=-\cos x\,(0)-\sin x\,(1)=-\sin x\end{aligned}$$

ATURAN RANTAI

Teorema (Aturan Rantai)

Andaikan $y=f(u)$ dan $u=g(x)$ menentukan fungsi komposit $y=f\big(g(x)\big)=f\circ g(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u=g(x)$, maka $f\circ g$ terdiferensialkan di x dan

$$(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Yakni

$$D_x y=D_u y D_x u$$

Contoh

Jika $y = (2 - 9x)^{15}$, cari $D_x y$

Jawab

Misal $u = 2x - 9x^2$ dan $y = u^{15}$

Jadi,

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u = (15u^{14})(2 - 18x) = 15(2x - 9x^2)^{14}(2 - 18x)$$

ATURAN RANTAI BERSUSUN

Andaikan

$$y = f(u) \text{ dan } u = g(v) \text{ dan } v = h(x)$$

Maka

$$D_x y = D_u y D_v u D_x v$$

Contoh

Cari $D_x[\sin^3(4x)]$

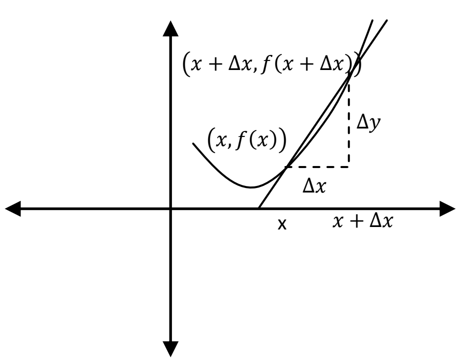
Jawab:

Misal $v = 4x$ dan $u = \sin v$ dan $y = u^3$

Maka

$$D_x y = D_u y D_v u D_x v = D_u(u^3) D_v(\sin v) D_x(4x) = (3u^2)(\cos v)(4) = 12 \cos 4x \, (\sin 4x)^2$$

NOTASI LEIBNIZ



Perbandingan yang menggambarkan kemiringan talibusur yang melalui $(x, f(x))$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika $\Delta x \to 0$, kemiringan talibusur ini mendekati kemiringan garis singgung, dan untuk kemiringan ini disebut kemiringan Leibniz menggunakan lambang $\frac{dy}{dx}$. Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Contoh

Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = x^3 - 3x^2 + 7x$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 7x) = \frac{d(x^3)}{dx} - 3\frac{d(x^2)}{dx} + 7\frac{d(x)}{dx} = 3x^2 - 3(2x) + 7(1) = 3x^2 - 6x + 7$$

ATURAN RANTAI

Andaikan bahwa $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Dalam notasi Leibniz, Aturan Rantai:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Contoh:

Cari ${}^{dy}/_{dx}$ jika $y = (x^3 - 2x)^{12}$

Jawab

Misal $u = x^3 - 2x$ dan $y = u^{12}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (12u^{11})(3x^2 - 2) = 12(x^3 - 2x)^{11}(3x^2 - 2)$$

Turunan Tingkat Tinggi

Turunan	Notasi f'	Notasi y'	Notasi D	Notasi Leibniz
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh:

Jika $y = x^{10} - x^5$, cari $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^5y}{dx^5}, \frac{d^{12}y}{dx^{12}}$.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = 10x^9 - 5x^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 90x^8 - 20x^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 720x^7 - 60x^2$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 5040x^6 - 120x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 30240x^5 - 120$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 0$$

Pendiferensialan Implisit

Contoh:

Jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Jawab:

Cara 1

Dapat diselesaikan dengan mengubahnya kedalam fungsi eksplisit terlebih dahulu

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2)(4x^2 - 3) - (8x)(x^3 - 1)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 3x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Cara 2

Didiferensialkan secara bersamaan untuk kedua ruas

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$

$$4x^2\frac{dy}{dx} + 8xy - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Tampak terlihat hasilnya berbeda dengan metode 1, tapi jika kita substitusi nilai $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$ maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8x\left(\frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3} = \frac{\frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Diferensial

Definisi

Andaikan $y = f(x)$ terdiferensialkan di x dan andaikan bahwa dx, diferensial dari variabel bebas x menyatakan pertambahan sebarang dari x. Diferensial yang bersesuaian dengan dy dari variabel tak bebas y didefinisikan oleh

$$dy = f'(x)dx$$

Contoh:

Cari dy jika $y = x^3 - 3x + 1$

Jawab:

$$dy = (3x^2 - 3)dx$$

Aturan-aturan utama diferensial dan turunan dapat digambarkan

Aturan Turunan	Aturan Diferensial
$\frac{dk}{dx} = 0$	$dk = 0$
$\frac{d(ku)}{dx} = k\frac{du}{dx}$	$d(ku) = kdu$
$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	$d(u + v) = du + dv$
$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	$d(uv) = udv + vdu$
$\frac{d({}^{u}/_{v})}{dx} = \frac{v\left({}^{du}/_{dx}\right) - u\left({}^{dv}/_{dx}\right)}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$d(u^n) = nu^{n-1}du$

Aproksimasi

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$$

Contoh:

Tentukan aproksimasi dari $\sqrt{4{,}6}$ adalah

Jawab:

Misal $y = \sqrt{x}$

Maka aproksimasi dari $\sqrt{4{,}6}$ adalah

$$f(4 + 0{,}6) \approx f(4) + dy$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Sedangkan di $x = 4$ dan $dx = 0{,}6$ mempunyai nilai

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0{,}6) = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15$$

Jadi

$$\sqrt{4{,}6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0{,}15 = 2{,}15$$