# 5 TURUNAN

JUMLAH PERTEMUAN : 4 PERTEMUAN

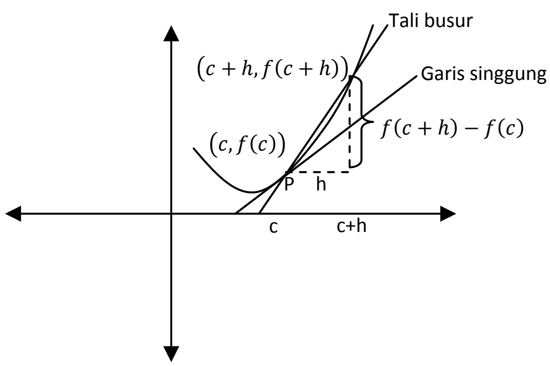
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Memahami konsep dasar turunan fungsi dan mengaplikasikan turunan fungsi pada permasalahan yang ada

**Materi :**

## 5.1 Pendahuluan

Ide awal adanya turunan adalah karena adanya permasalahan garis singgung di titik $P\left(c, f(c)\right)$




$\overline{PQ}$ adalah tali busur untuk kurva $f(x)$, dengan kemiringan $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Maka kemiringan garis singgung di titik P:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

**Contoh:**

Jika $f(x) = x^2 - 1$, tentukan kemiringan garis di titik:

a. $(1,0)$

b. $(2,3)$

c. $(3,8)$

**Jawab:**

Untuk menyelesaikan permasalahan diatas karena hanya yang berubah hanya titiknya saja maka dapat dikerjakan secara langsung, dengan cara mengerjakan secara umum untuk di titik $(c, f(c))$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} =$$

Karena $f(x) = x^2 - 1$ maka $f(c) = c^2 - 1$ dan $f(c+h) = (c+h)^2 - 1 = c^2 + 2ch + h^2 - 1$

Maka

$$\lim_{h \to 0} \frac{(c^2 + 2ch + h^2 - 1) - (c^2 - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c^2 + 2ch + h^2 - 1 - c^2 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ch + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2c+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2c + h) = 2c$$

Maka kemiringan garis singgung kurva $f(x) = x^2 - 1$ adalah $2c$, jadi

a. kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $\left(c, f(c)\right)$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(1,0)$ adalah $2(1) = 2$

b. kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $\left(c, f(c)\right)$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(2,3)$ adalah $2(2) = 4$

c. kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $\left(c, f(c)\right)$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(3,8)$ adalah $2(3) = 6$

Dapat dilihat bahwa kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $\left(c, f(c)\right)$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $\left(x, f(x)\right)$ adalah $2x$. Ini sama seperti ketika kita mencari turunan fungsi $f(x) = x^2 - 1$ yaitu $f'(x) = 2x$

## 5.2 Definisi

**Turunan** fungsi $f$ adalah fungsi lain $f'$ (dibaca "$f$ aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan $c$ adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limitnya ini ada.

## 5.3 Notasi dari turunan

1. Notasi aksen, $f'(x)$
2. Notasi d, $D_x y$
3. Notasi Leibniz, $\frac{dy}{dx}$

Contoh:

Andaikan $f(x) = x^2 - x$. Cari $f'(3)$.

Jawab:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(3+h)^2 - (3+h)] - [3^2 - 3]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 5 + h = 5$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^3 + 2$, cari $\mathrm{D}\big(f(x)\big)$!

Jawab:

$$D(x^3 + 2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 + 2] - [x^3 + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Contoh:

Jika $f(x) = \frac{2}{x+2}$, cari $\frac{df}{dx}$!

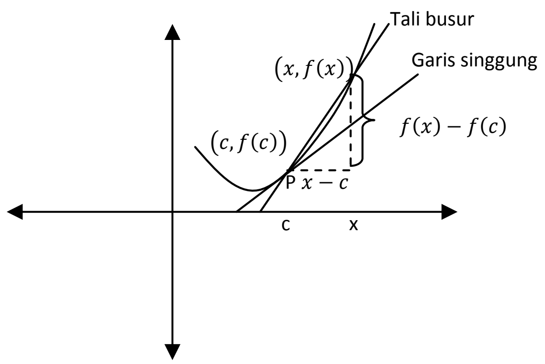
Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(x+h)+2}-\frac{2}{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+2)-2(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2x+4-2x-2h-4}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{(x+h+2)(x+2)}\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2}{(x+h+2)(x+2)} = -\frac{2}{(x+2)^2}$$

### 5.4 Bentuk yang setara untuk turunan




$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Contoh:

Andaikan $f(x) = x^2 - x$. Cari $f'(3)$.

Jawab:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{[x^2 - x] - [3^2 - 3]}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 2) = 5$$

Jika $f(x) = \frac{2}{x+2}$, cari $\frac{df}{dx}$!

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\frac{2}{t+2} - \frac{2}{x+2}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\frac{2(x+2) - 2(t+2)}{(t+2)(x+2)}}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{\frac{2x + 4 - 2t - 4}{(t+2)(x+2)}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\frac{2(x - t)}{(t+2)(x+2)}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{-2(t - x)}{(t+2)(x+2)} \frac{1}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{-2}{(t+2)(x+2)} = -\frac{2}{(x+2)^2}$$

**5.5 Keterdiferensialan menunjukkan kekontinuan**

Jika sebuah kurva mempunyai sebuah garis singgung di sebuah titik, maka kurva itu tidak dapat melompat atau sangat berayun di titik tersebut. Perumusan yang persis dari kenyataan ini merupakan sebuah teorema penting.

**Teorema**

Jika $f'(c)$ ada, maka $f$ kontinu di $c$.

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku.

Contoh:

Jika $f(x) = x^2$, tentukan apakah fungsi $f$ kontinu di $x = 0$?

Jawab:

Tanpa harus membuktikan

1. $f(c)$ ada
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Berdasarkan teorema diatas maka:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} \lim_{x \to 0} x = 0$$

Karena fungsi $f(x) = x^2$ada turunannya di $x = 0$, maka dapat dikatakan fungsi $f(x) = x^2$

kontinu di $x = 0$

Contoh (penyangkal teorema):

Jika $f(x) = |x|$, tentukan $f'(0)$

Jawab:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Limit ini tidak ada karena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Sedangkan

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Karena limit kanan dan limit kirinya tidak sama.

## 5.6 Aturan Pencarian Turunan

### 5.6.1 Fungsi konstanta

Fungsi konstanta $f(x) = k$ mempunyai grafik berupa garis horisontal, sehingga kemiringannya nol dimana-mana.

**Teorema (Aturan Fungsi Konstanta)**

Jika $f(x) = k$ dengan $k$ suatu konstanta maka untuk sebarang $x$, $f'(x) = 0$, yakni

$$D(k) = 0$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

### 5.6.2 Fungsi identitas

**Teorema (Aturan Fungsi Identitas)**

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$, yakni

$$D(x) = 1$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

### 5.6.3 Fungsi polinom

**Teorema (Aturan Pangkat)**

Jika $f(x) = x^n$, dengan $n \in \mathcal{B}^+$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$, yakni

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)}{h} = nx^{n-1}$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^3$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$f'(x) = D(x^3) = 3x^2$$

### 5.6.4 D adalah sebuah operator linier

**Teorema (Aturan Kelipatan Konstanta)**

Jika $k$ suatu konstanta dan $f$ suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot Df(x)$, yakni

$$D[k \cdot f(x)] = kDf(x)$$

Bukti

Andaikan $F(x) = kf(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = 10x^{10}$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[10x^{10}] = 10D(x^{10}) = 10(10x^9) = 100x^9$$

**Teorema (Aturan Jumlah)**

Jika $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, yakni

$$D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 + 4x + 4$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[x^2 + 4x + 4] = D(x^2) + 4D(x) + D(4) = 2x + 4$$

**Teorema (Aturan Selisih)**

Jika $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$, yakni

$$D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 - 4x$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[x^2 - 4x] = D(x^2) - 4D(x) = 2x - 4$$

**Teorema (Hasil kali)**

Jika $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x)$, yakni

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = 3x(x^2 + 2)$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[3x(x^2 + 2)] = 3xD(x^2 + 2) + (x^2 + 2)D(3x) = 3x(2x) + (x^2 + 2)3$$
$$= 6x^2 + 3(x^2 + 2)$$

**Teorema (Aturan Hasilbagi)**

Jika $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g\prime(x)}{g^2(x)}$, yakni

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

Contoh:

Jika $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D\left(\frac{1}{3x^2+1}\right) = \frac{(3x^2+1)D(1) - 1D(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2} = \frac{(3x^2+1)0 - (6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$$

### 5.6.5 Fungsi sinus dan kosinus

Jika $f(x) = \sin x$, tentukan $f'(x)$

$$D(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\sin x \frac{(1-\cos h)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= -\sin x\left[\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right] + \cos x\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right]$$

Ingat bahwa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

Maka

$$D(\sin x) = -\sin x\,(0) + \cos x\,(1) = \cos x$$

Jika $f(x) = \cos x$, tentukan $f'(x)$

$$D(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right) - \sin x\frac{\sin h}{h} = -\cos x\,(0) - \sin x\,(1) = -\sin x$$

Contoh:

Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x)$?

Jawab

Karena $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, maka

Misalkan $g(x) = \sin x => g'(x) = \cos x$ dan $h(x) = \cos x => h'(x) = -\sin x$

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{\big(h(x)\big)^2} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

## 5.7 Aturan Rantai

**Teorema (Aturan Rantai)**

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f\big(g(x)\big) = f\circ g(x)$. Jika $g$ terdiferensialkan di $x$ dan $f$ terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f\circ g$ terdiferensialkan di $x$ dan

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Yakni

$$D_x y = D_u y D_x u$$

Contoh

Jika $y = (2x - 9x^2)^{15}$, cari $D_x y$

Jawab

Misal $u = 2x - 9x^2$ dan $y = u^{15}$, maka $D_x u = 2 - 18x$ dan $D_u y = 15u^{14}$

Jadi,

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u = (15u^{14})(2 - 18x) = 15(2x - 9x^2)^{14}(2 - 18x)$$

**5.8 Aturan Rantai Bersusun**

Andaikan

$$y = f(u) \text{ dan } u = g(v) \text{ dan } v = h(x)$$

Maka

$$D_x y = D_u y D_v u D_x v$$

Contoh

Cari $D_x[\sin^3(4x)]$

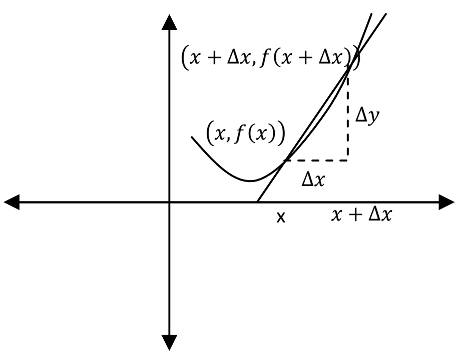
Jawab:

Misal $v = 4x$ dan $u = \sin v$ dan $y = u^3$

Maka

$$D_x y = D_u y D_v u D_x v = D_u(u^3) D_v(\sin v) D_x(4x) = (3u^2)(\cos v)(4) = 12\cos 4x\,(\sin 4x)^2$$

**5.9 Notasi Leibniz**




Perbandingan yang menggambarkan kemiringan talibusur yang melalui $(x, f(x))$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika $\Delta x \to 0$, kemiringan talibusur ini mendekati kemiringan garis singgung, dan untuk kemiringan ini disebut kemiringan Leibniz menggunakan lambang $\frac{dy}{dx}$. Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Contoh

Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = x^3 - 3x^2 + 7x$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 7x) = \frac{d(x^3)}{dx} - 3\frac{d(x^2)}{dx} + 7\frac{d(x)}{dx} = 3x^2 - 3(2x) + 7(1)$$

$$= 3x^2 - 6x + 7$$

### 5.9.1 Aturan Rantai

Andaikan bahwa $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Dalam notasi Leibniz, Aturan Rantai:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Contoh:

Cari ${dy}/{dx}$ jika $y = (x^3 - 2x)^{12}$

Jawab

Misal $u = x^3 - 2x$ dan $y = u^{12}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (12u^{11})(3x^2 - 2) = 12(x^3 - 2x)^{11}(3x^2 - 2)$$

Contoh:

Cari $\frac{dy}{dx}$, jika $y = \sqrt{\sin x^2}$

Jawab:

Misal $u = x^2$, $a = \sin u$ dan $y = a^{\frac{1}{2}}$, maka $\frac{du}{dx} = 2x$, $\frac{da}{du} = \cos u$ dan $\frac{dy}{da} = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\frac{da}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)(\cos u)(2x) = x(\cos x^2)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin u}}\right) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

**5.10 Turunan Tingkat Tinggi**

| Turunan | Notasi $f'$ | Notasi $y'$ | Notasi $D$ | Notasi Leibniz |
|---|---|---|---|---|
| Pertama | $f'(x)$ | $y'$ | $D_x y$ | $\frac{dy}{dx}$ |
| Kedua | $f''(x)$ | $y''$ | $D_x^2 y$ | $\frac{d^2y}{dx^2}$ |
| Ketiga | $f'''(x)$ | $y'''$ | $D_x^3 y$ | $\frac{d^3y}{dx^3}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| Ke-n | $f^{(n)}(x)$ | $y^{(n)}$ | $D_x^n y$ | $\frac{d^ny}{dx^n}$ |

Contoh:

Jika $y = x^{10} - x^5$, cari $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^5y}{dx^5}, \frac{d^{12}y}{dx^{12}}$.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = 10x^9 - 5x^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 90x^8 - 20x^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 720x^7 - 60x^2$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 5040x^6 - 120x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 30240x^5 - 120$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 0$$

## 5.11 Pendiferensialan Implisit

Contoh:

Jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Jawab:

Cara 1

Dapat diselesaikan dengan mengubahnya kedalam fungsi eksplisit terlebih dahulu

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2)(4x^2 - 3) - (8x)(x^3 - 1)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 3x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Cara 2

Didiferensialkan secara bersamaan untuk kedua ruas

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$

$$4x^2\frac{dy}{dx} + 8xy - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Tampak terlihat hasilnya berbeda dengan metode 1, tapi jika kita substitusi nilai $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$ maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8x\left(\frac{x^3-1}{4x^2-3}\right)}{4x^2-3} = \frac{\frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{4x^2-3}}{4x^2-3} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2-3)^2}$$

## 5.12 Diferensial

### 5.12.1 Definisi

Andaikan $y = f(x)$ terdiferensialkan di $x$ dan andaikan bahwa $dx$, diferensial dari variabel bebas $x$ menyatakan pertambahan sebarang dari $x$. Diferensial yang bersesuaian dengan $dy$ dari variabel tak bebas $y$ didefinisikan oleh

$$dy = f'(x)dx$$

Contoh:

Cari $dy$ jika $y = x^3 - 3x + 1$

Jawab:

$$dy = (3x^2 - 3)dx$$

Aturan-aturan utama diferensial dan turunan dapat digambarkan

| Aturan Turunan | Aturan Diferensial |
|---|---|
| $\frac{dk}{dx}=0$ | $dk=0$ |
| $\frac{d(ku)}{dx}=k\frac{du}{dx}$ | $d(ku)=kdu$ |
| $\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$ | $d(u+v)=du+dv$ |
| $\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ | $d(uv)=udv+vdu$ |
| $\frac{d\left(u/v\right)}{dx}=\frac{v\left(du/dx\right)-u\left(dv/dx\right)}{v^2}$ | $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ |
| $\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ | $d(u^n)=nu^{n-1}du$ |

## 5.12.2 Aproksimasi

Formula aproksimasi:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy=f(x)+f'(x)\Delta x$$

Contoh:

Tentukan aproksimasi dari $\sqrt{4{,}6}$ adalah

Jawab:

Misal $y = \sqrt{x}$

Maka aproksimasi dari $\sqrt{4{,}6}$ adalah

$$f(4 + 0{,}6) \approx f(4) + dy$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Sedangkan di $x = 4$ dan $dx = 0{,}6$ mempunyai nilai

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0{,}6) = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15$$

Jadi

$$\sqrt{4{,}6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0{,}15 = 2{,}15$$