**MODUL PERKULIAHAN**

**EDISI 1**

**LOGIKA MATEMATIKA**



Penulis :

Nelly Indriani Widiastuti S.Si., M.T.

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

UNIVERSITAS KOMPUTER INDONESIA

BANDUNG

2011

|  |
| --- |
|  EVALUASI LOGIS**4** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUANTUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |

**Materi :**

## **EVALUASI VALIDITAS ARGUMEN**

Pembuktian validitas ekspresi-ekspresi logika dari suatu argumen dapat dilakukan dengan tabel kebenaran. Pertama harus memberikan variabel proposisional pada tiap proposisi argumen dan kemudian membentuk proposisi majemuk untuk tiap pernyataan, dan kemudian mengevaluasi dengan tabel kebenaran.

Contoh 1

Jika anda mengambil mata kuliah logika matematika, dan jika anda tidak memahami tautologi, maka anda tidak lulus.

Untuk membuktikan validitasnya, buat variabel proposisional yang relevan

P = Anda mengambil mata kuliah logika matematika

Q = Anda memahami tautologi

 R = Anda lulus

Sehingga bentuk ekspresi logikanya seperti berikut :

$$\left(P∧\~Q\right)\rightarrow \~R$$

Selanjutnya buat tabel kebenarannya dengan semua nilai kebenaran P, Q, dan R yang memungkinkan.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **R** | **~Q** | **~R** | $$\left(P∧\~Q\right)$$ | $$\left(P∧\~Q\right)\rightarrow \~R$$ |
| F | F | F | T | T | F | T |
| F | F | T | T | F | F | T |
| F | T | F | F | T | F | T |
| F | T | T | F | F | F | T |
| T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | F | T | F |
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | T | T | F | F | F | T |

Untuk membuat pernyataan yang nantinya pernyataan-pernyataan dalam argumen tersebut dapat diubah menjadi ekspresi logika dapat menggunakan cara heuristik berikut :

Heuristik untuk mengubah pernyataan menjadi ekspresi logika :

1. Ambil pernyataan-pernyataan yang pendek, tanpa kata “dan”, “atau”, “jika…maka…”,”…jika dan hanya jika…”, pada pernyataan tersebut yang bisa dijawab benar atau salah.
2. Ubahlah pernyataan-pernyataan yang pendek tersebut dengan variabel-variabel proposisional.
3. Rangkailah variabel-variabel proposisional dengan perangkai yang relevan
4. Bentuklah menjadi proposisi majemuk jika memungkinkan dengan memberi tanda kurung biasa yang tepat.

Contoh 2

Jika Badu belajar rajin dan sehat, maka Badu lulus ujian, atau jika Badu tidak belajar rajin dan tidak sehat, maka Badu tidak lulus ujian.

Langkah 1

Menentukan proposisi yang tepat

1. Badu rajin belajar
2. Badu sehat
3. Badu lulus ujian

Langkah 2

Mengganti proposisi dengan variabel proposisi

P = Badu rajin belajar

Q = Badu sehat

R = Badu lulus ujian

Langkah 3

Perangkai yang relevan adalah implikasi, negasi, disjungsi dan konjungsi.

Langkah 4

Ubah menjadi ekspresi logika berupa proposisi majemuk

$$\left(\left(P∧Q\right)\rightarrow R\right))∨((\~P∧\~Q)\rightarrow \~R)$$

## **TAUTOLOGI**

Argumen yang dibuktikan validitasnya dengan tabel kebenaran harus menunjukan nilai benar sehingga argumen tersebut valid. Jika pada tabel kebenaran untuk semua pasangan nilai variabel proposisional bernilai benar atau T, maka disebut Tautologi.

Contoh 3

Buktikan : $\~(P∧Q)∨Q$ adalah tautologi ?

Bukti : buat tabel kebenarannya seperti berikut :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | $$P∧Q$$ | $$\~(P∧Q)$$ | $$\~(P∧Q)∨Q$$ |
| F | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T |
| T | T | T | F | T |

Jadi ekspresi diatas adalah tautologi. Tautologi dapat ditulis dengan simbol $⊧$ (metasymbol, bukan perangkai logika) sehingga ekspresi logika dapat ditulis $⊧\~(P∧Q)∨Q$

Contoh 4

Diketahui : jika $\~(P∧Q)∨Q$ adalah tautologi

Buktikan : $\~\left(\left(P∨Q\right)∧R\right)∨R$ juga tautologi

Bukti :

Gunakan skema A dan B

1. Masukan ke ekspresi logika pertama menjadi $\~(A∧B)∨B$
2. Misalkan A = $\~(P∧Q)$, sedangkan B = Q, lalu masukan ke ekspresi logika yang dibuktikan. Maka : $\~\left(\left(P∨Q\right)∧R\right)∨R$ akan menjadi $\~(A∧B)∨B$
3. dan (2) akan terlihat sama, jadi disebut tautologi.

## **KONTRADIKSI**

Kebalikan dari tautologi adalah kontradiksi atau absurditas, yaitu jika semua pasangan nilai dari tabel kebenaran menghasilkan nilai F.

Definisi : suatu ekspresi logika yang selalu bernilai salah di dalam tabel kebenarannya tanpa memperudlikan nilai kebenara dari proposisi-proposisi yang berada didalamnya, disebut kontradiksi.

Contoh 5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **~P** | **P**$∧\~P$ |
| F | T | F |
| T | F | F |

 Pada argumen, suatu kontradiksi dapat dijumpai jika antara premis-premis bernilai T, sedangkan kesimpulan bernilai F. hal ini tak mungkin terjadi, karena premis yang benar harus menghasilkan kesimpulan benar.

* 1. **CONTIGENT**

Jika semua nilai kebenaran menghasilkan nilai F dan T, disebut contigent atau formula campuran (mixed formulae).

Contoh 6

$$((P∧Q)\rightarrow R)\rightarrow P$$

Tabel kebenarannya

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **R** | $$P∧Q$$ | $$(P∧Q)\rightarrow R$$ | $$((P∧Q)\rightarrow R)\rightarrow P$$ |
| F | F | F | F | T | F |
| F | F | T | F | T | F |
| F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F |
| T | F | F | F | T | T |
| T | F | T | F | T | T |
| T | T | F | T | F | T |
| T | T | T | T | T | T |

* 1. **PENGGUNAAN TAUTOLOGI**

Beberapa hal penting yang mengakibatkan tautologi, yaitu :

1. Implikasi secara logis (logical implication). Misalnya P dan Q adalah dua buah ekspresi logika, maka jika dikatakan P secara logis mengimplementasikan Q dapat ditulis dengan $P⇒Q$ .
2. Ekivalen secara logis (logical equivalence) misalnya P dan Q adalah dua buah ekspresi logika, maka jika dikatakan P ekivalen dengan Q, dapat ditulis dengan P $≡Q$. Di sini disyaratkan $P≡Q$, jika dan hanya jika $P\leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Terdapat dua jenis implikasi yaitu :

1. Implikasi material (material implication), contoh : $P\rightarrow Q$. Tbel kebenaran untuk implikasi berlaku.
2. Implikasi logis (logical implication), contoh : $P⇒Q$. Ini dapat dibaca “menyebabkan”, sebagai contoh : P = T, maka P pasi tautologi. Jika P = F, maka P pasti kontradiksi. Jika $T⇒P$, maka A pasti taotologi, dan jika $F⇒P$, maka P kontradiksi.
	1. **LATIHAN**

Soal 1

Tentukan apakah dari ekspresi-ekspresi logika berikut ini termasuk tautologi, kontradiksi atau contigent

1. $P\rightarrow \left(Q\rightarrow P\right)$
2. $\left(Q\rightarrow P\right)\rightarrow P$
3. $\~\~P\rightarrow P$
4. $\left(\~P\rightarrow \~Q\right)\rightarrow (Q\rightarrow P)$
5. $\left(P\rightarrow \left(Q\rightarrow R\right)\right)\rightarrow \left(\left(P\rightarrow Q\right)\rightarrow \left(P\rightarrow R\right)\right)$
6. $\left(P∧\left(P\rightarrow Q\right)\right)\rightarrow Q$
7. $\left((P\rightarrow Q\right)\leftrightarrow (\~P∨Q)$
8. $\left((P\rightarrow Q\right)∧(Q\rightarrow R))\rightarrow (P\rightarrow R)$
9. $\left((P\rightarrow Q\right)\leftrightarrow (\left(P∧Q\right)∨\left(\~P∧\~Q\right))$
10. $\left(Q∧(P\rightarrow Q\right))\rightarrow P$

Soal 2

Jika $(P∨\~P)$ adalah tautologi, buktikan bahwa ekspresi-ekspresi logikaberikut ini adalah tautologi

1. $\left(P\rightarrow Q\right)∨\~\left(P\rightarrow Q\right)$
2. $\~P∨\~\~P$
3. $\left(\left(P∧R\right)∨Q\right)∨\~((P∧R)∨Q)$

Soal 3

Dibawah ini adalah argumen yang disebut destructive dilemma.

Jika Badu senang, maka Siti senang, dan jika Badu sedih, maka Siti sedih. Siti tidak senang atau Siti tidak sedih. Dengan demikian, Badu tidak senang atau Badu tidak sedih.

Buat ekspresi logikanya dan buktikan apakah termasuk tautologi, kontradiksi atau contigent dengan tabel kebenaran.

* 1. **EKUIVALEN LOGIS**

Jika dua buah ekspresi logika adalah tautologi, maka kedua buah ekspresi logika ekuivalen secara logis, demikian juga jika kontradiksi. Dalam contingent, jika nilai T atau F pada tabel kebenaran dalam urutan yang sama, maka tetap disebut ekuivalen secara logis.

Contoh 7

P = Dea sangat cantik dan ramah

Q = Dea ramah dan sangat cantik

Ekspresi logikanya :

1. $P∧Q$
2. $Q∧P$

Kedua ekspresi logika tersebut ekuivalen secara logis, maka ditulis :

$$\left(P∧Q\right)≡(Q∧P)$$

 Dengan tabel kebenaran :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | $$(P∧Q)$$ | $$(Q∧P)$$ |
| F | F | F | F |
| F | T | F | F |
| T | F | F | F |
| T | T | T | T |

**Definisi** : proposisi P dan Q disebut ekuivalen secara logis jika $P⟷Q$ adalah tautologi. Notasi atau simbol $P≡Q$ menandakan bahwa P dan Q adalah ekuivalen secara logis. Proposisi dapat digantikan dengan ekspresi logika berupa proposisi majemuk.

* 1. **KOMUTATIF**

Jika variabel dua proposisional dapat saling berganti tempat tanpa mengubah nilai kebenaran dari kedua ekspresi logika karena tetap memiliki nilai kebenaran yang sama disebut komutatif (commutativity)

Perangkai logika yang memiliki sifat komutatif adalah $∧,∨, dan ⟷$.

Jadi

1. $\left(P∧Q\right)≡\left(Q∧P\right)$
2. $\left(P∨Q\right)≡\left(Q∨P\right)$
3. $\left(P\leftrightarrow Q\right)≡\left(Q\leftrightarrow P\right)$

Adalah ekspresi logika yang komutatif.

* 1. **ASOSIATIF**

Jika diterapkan pada sua buah ekspresi logika, penempatan tanda kurung dapat diubah tanpa mengubah nilai kebenarannya pada tabel kebenaran.

Contoh 8

$\left(\left(P∧Q\right)∧R\right)$ dan $\left(P∧(Q∧R\right))$.

Maka tabel kebenarannya

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **R** | $$\left(P∧Q\right)$$ | $$\left(\left(P∧Q\right)∧R\right)$$ | $$Q∧R$$ | $$\left(P∧(Q∧R\right))$$ |
| F | F | F | F | **F** | F | **F** |
| F | F | T | F | **F** | F | **F** |
| F | T | F | F | **F** | F | **F** |
| F | T | T | F | **F** | T | **F** |
| T | F | F | F | **F** | F | **F** |
| T | F | T | F | **F** | F | **F** |
| T | T | F | T | **F** | F | **F** |
| T | T | T | T | **T** | T | **T** |

Karena tanda kurungnya dapat dipindah tanpa mengubah nilai kebenaran, maka disebut asosiatif. Perangkai logika lain yang memiliki sifat asosiatif adalah $∨, dan \leftrightarrow $.

Perlu diperhatikan bahwa jika perangkainya berbeda dalam satu ekspresi logika, kurung tidak dapat dipindah sembarangan.

* 1. **HUKUM-HUKUM LOGIKA**

Hukum-hukum logika diambil dari ekspresi-ekspresi logikaberdasarka pernyataan-pernyataan sehingga tetap dapat dibuktikan kebenarannya melalui pernyataan tersebut.

Berikut adalah hukum-hukum logika yang ekuivalen

|  |  |
| --- | --- |
| **EKUIVALEN LOGIS** | **NAMA** |
| $$P∧1≡P$$$$P∨0≡P$$ | Indenitity of $∧$ Zero of $∨$ |
| $$P∨1≡1$$$$P∧0≡0$$ | Indenitity of $∧$ Zero of $∧$ |
| $$P∨\~P≡1$$$$P∧\~P≡0$$ | Tautology Law of contradiction |
| $$P∨P≡P$$$$P∧P≡P$$ | Idempotence lawsIdempotence laws |
| $$\~\~P≡P$$ | Law of double negotion |
| $$P∧Q≡Q∧P$$$$P∨Q≡Q∨P$$ | ComutativityComutativity  |
| $$\left(P∧Q\right)∧R≡P∧(Q∧R)$$$\left(P∨Q\right)∨R≡P∨(Q∨R$*)* | Assosiativity Assosiativity |
| $P∧\left(Q∨R\right)≡(P∧Q)∨(Q∧R$)$P∨\left(Q∧R\right)≡(P∨Q)∧(Q∨R$) | Distributivity Distributivity |
| $$P∧\left(P∨Q\right)≡P$$$$P∨\left(P∧Q\right)≡P$$ | Absorption Absorption |
| $$P∧\left(\~P∨Q\right)≡P∧Q$$$$P∨\left(\~P∧Q\right)≡P∨Q$$ | De Morgan’s LawDe Morgan’s Law |
| $$\~\left(P∧Q\right)≡\~P∨\~Q$$$$\~\left(P∨Q\right)≡\~P∧\~Q$$ |  |
| $$\left(P∧Q\right)∨\left(P∧\~Q\right)≡P$$ |  |
| $$P\rightarrow Q≡\~P∨Q$$$$P\rightarrow Q≡\~\left(P∧\~Q\right)$$ |  |
| $$P\leftrightarrow Q≡\left(P∧Q\right)∨\left(\~P∧\~Q\right)$$$$P\leftrightarrow Q≡\left(P\rightarrow Q\right)∧\left(Q\rightarrow P\right)$$ |  |
| $$\left(P∧Q\right)∨\left(P∧\~Q\right)≡P$$$$\left(P∨Q\right)∧\left(P∨\~Q\right)≡P$$ |  |
| $$\left(P∧Q\right)∨\left(\~P∧Q\right)≡Q$$$$\left(P∨Q\right)∧(\~P∨Q)≡Q$$ |  |

* 1. **LATIHAN 2**

Soal 1

Buktikan bahwa ekspresi-ekspresi logika berikut ekuivalen dengan menggunakan tabel kebenaran :

1. $\~P\leftrightarrow Q≡\left(\~P∨Q\right)∧(\~Q∨P)$
2. $P\rightarrow \left(\~P\rightarrow Q\right)≡1$
3. $\left(P∨\~Q\right)\rightarrow R≡\left(\~P∧Q\right)∨R$
4. $P\rightarrow \left(Q\rightarrow R\right)≡\left(P\rightarrow Q\right)\rightarrow R$
5. $P\rightarrow Q≡\~\left(P∧\~Q\right)$
6. $\~\left(\~\left(P∧Q\right)∨Q\right)≡0$
7. $(\left(P∧\left(Q\rightarrow R\right)\right)∧\left(P\rightarrow \left(Q\rightarrow \~R\right)\right))\rightarrow P≡1$

Soal 2

Buktikan hukum-hukum logika

1. Silogisme hipotetis
2. Silogisme disjungtif
3. Modus ponen
4. Modus tolen

Adalah ekuivalen dengan 1 atau tautologi.