3 APLIKASI INTEGRAL TENTU

JUMLAH PERTEMUAN : 3 PERTEMUAN

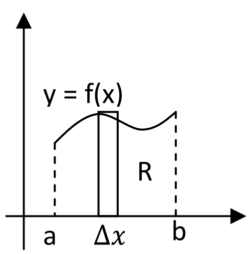
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Memahami penggunaan integral tentu

Materi :

3.1 Luas Daerah

1. Misalkan daerah $R = \{(x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Luas R?



Langkah-langkah:

1. Iris R menjadi n bagian dari luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi f(x). alas (lebar) Δx

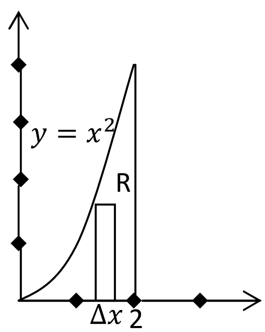
$$\Delta A \approx f(x)\Delta x$$

2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas R} = A = \int_a^b f(x)dx$$

Contoh:

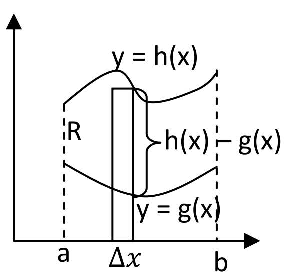
Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x dan x = 2?



Luas irisan : $\Delta A \approx x^2 \Delta x$

Luas daerah : $A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

2. Misalkan daerah $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Luas R?



Langkah:

1. Iris R menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi (h(x) – g(x)) dan alas Δx

$$\Delta A \approx [h(x) - g(x)]\Delta x$$

2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$\text{Luas R} = A = \int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx$$

Contoh:

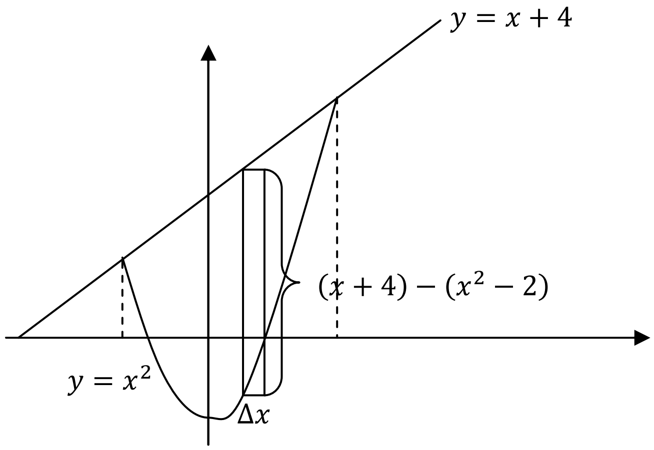
Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola $y = x^2 - 2$

Jawab:

Titik potong antara garis dan parabola:

$x + 4 = x^2 - 2 \leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

Maka titik potongnya : x = 3 dan x = -2



Luas irisan :

$$\Delta A \approx [(x + 4) - (x^2 - 2)]\Delta x$$

Sehingga luas daerah:

$$A = \int_{-2}^{3} [(x + 4) - (x^2 - 2)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6) dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \Big|_{-2}^{3}$$

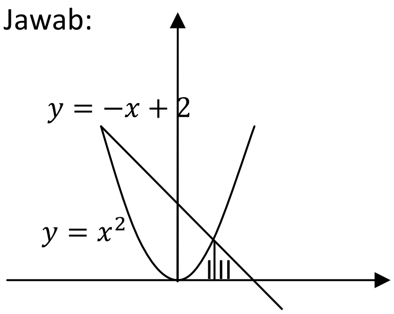
$$= \frac{125}{6}$$

Catatan : Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak di atas dikurangi kurva yang dibawahnya. Jika batas atas dan batas bawah irisan berubah untuk sebarang irisan di R maka daerah R harus dibagi dua atau lebih.

Contoh:

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, $y = x^2$ dan $y = -x + 2$

Jawab:



Jika dibuat irisan yang tegak lurus dengan sumbu x, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian.

Luas daerah I: $\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

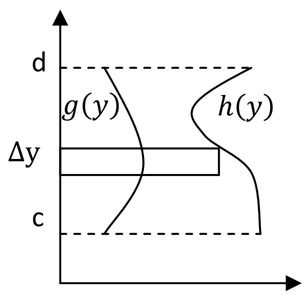
Luas daerah II: $\Delta A_2 \approx (-x + 2)\Delta x$

$$A_2 = \int_1^2 (-x + 2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Sehingga luas daerah:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

3. Misalkan daerah $R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$. Luas R?



Langkah:

1. Iris R menjadi n selang dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi dengan tinggi [h(y) - g(y)] dan alas Δy

$$\Delta A \approx [h(y) - g(y)]\Delta y$$

2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas R} = A = \int_c^d [h(y) - g(y)]dy$$

Contoh:

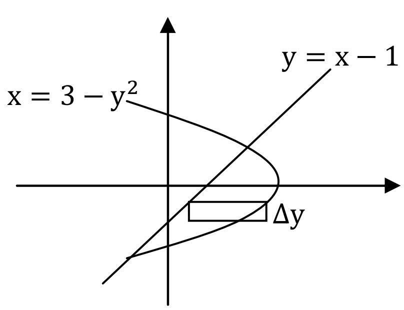
Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $x = 3 - y^2$ dan $y = x - 1$

Jawab:

Titik potong:

$$y + 1 = 3 - y^2 \leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \leftrightarrow (y + 2)(y - 1) = 0$$

Jadi titik potongnya: y = -2 dan y = 1



Luas irisan : $\Delta A \approx [(3-y^2)-(y+1)]\Delta y$

Sehingga luas daerah:

$$\text{Luas daerah} = A = \int_{-2}^{1}[(3-y^2)-(y+1)]dy$$

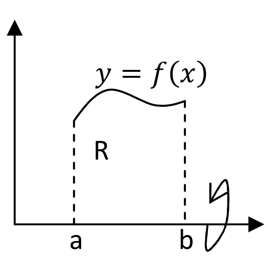
$$= \int_{-2}^{1}(-y^2-y+2)dy = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

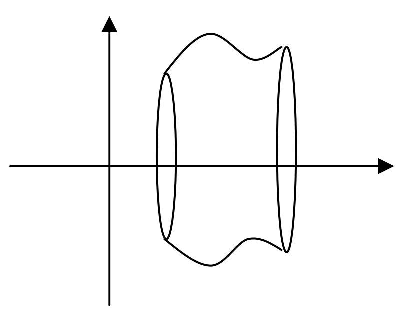
Catatan: Jika irisan sejajar dengan sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang terletak disebelah kiri. Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sebarang irisan R maka daerah R harus dibagi dua atau lebih.

3.2 Menghitung Volume Benda Putar

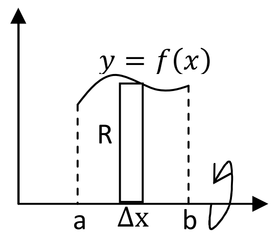
3.2.1 Metode cakram

1. Daerah $R = \{(x,y)|a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ diputar terhadap sumbu x. Berapa volume benda tersebut?



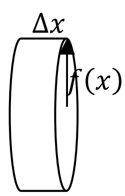


Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan, dan ambil limitnya.



Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari f(x). sehingga

$$\Delta V \approx \pi f^2(x)\Delta x$$



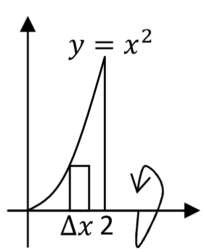
Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cakram. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Contoh:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis x = 2 diputar terhadap sumbu x.

Jawab:



Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari x^2 dan tebal Δx.

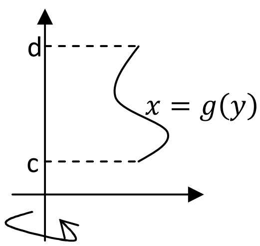
Sehingga

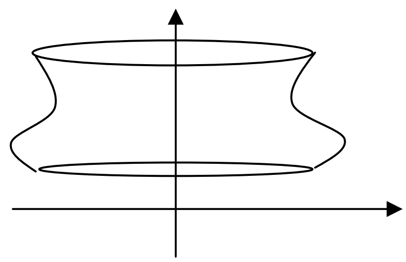
$$\Delta V \approx \pi(x^2)^2\Delta x = \pi x^4 \Delta x$$

Volume benda putar

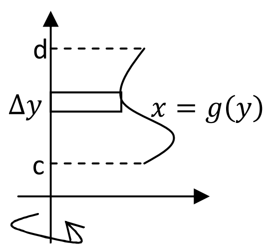
$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5}x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

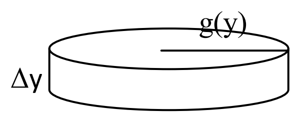
2. Daerah $R = \{(x, y)|c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(x)\}$ diputar terhadap sumbu y?





Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan, dan ambil limitnya.





Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi g(y) dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan jari-jari g(y). Sehingga

$$\Delta V \approx \pi g^2(y)\Delta y$$

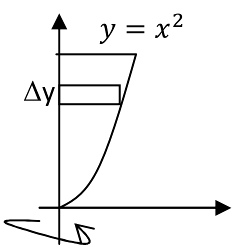
Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cakram. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$

Contoh:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan garis y = 4, sumbu y diputar terhadap sumbu y.

Jawab:



Jika irisan dengan tinggi $\sqrt{y}$ dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari $\sqrt{y}$ dan tebal Δy. Sehingga

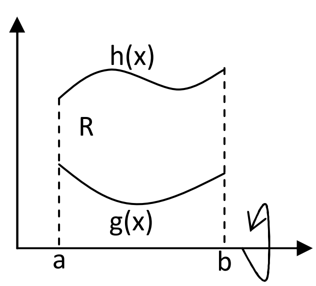
$$\Delta V \approx \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 \Delta y = \pi y \Delta y$$

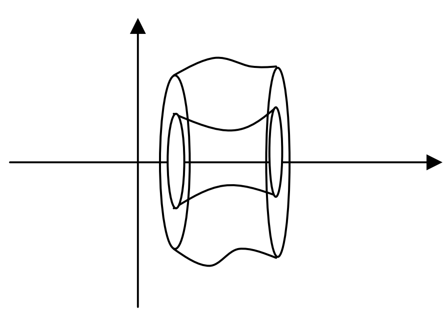
Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$

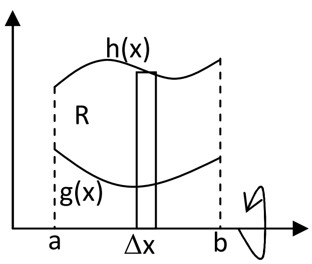
3.2.2 Metode Cincin

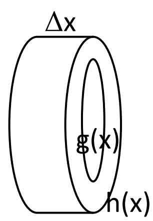
A. Daerah $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ diputar terhadap sumbu x. Berapa volume benda putar yang terjadi?





Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.





Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi h(x) – g(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δx dan jari-jari luar h(x) dan jari-jari dalamnya g(x). Sehingga

$$\Delta V \approx [h^2(x) - g^2(x)]\Delta x$$

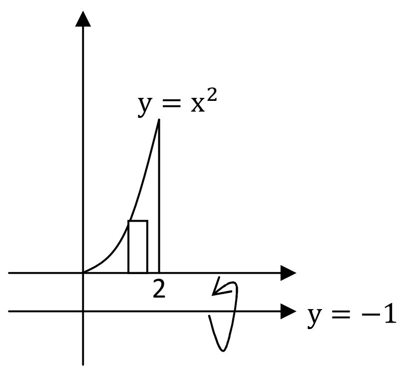
Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cincin. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$V = \pi \int_a^b [h^2(x) - g^2(x)]dx$$

Contoh:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis x = 2 diputar terhadap garis y = -1.

Jawab:



Jika irisan diputar terhadap garis $y = -1$ akan diperoleh suatu cincin dengan jari-jari dalam 1 dan jari-jari luar $1 + x^2$.

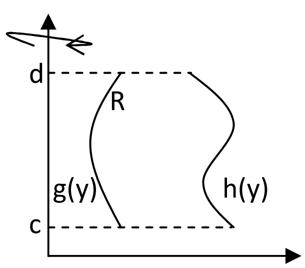
Sehingga

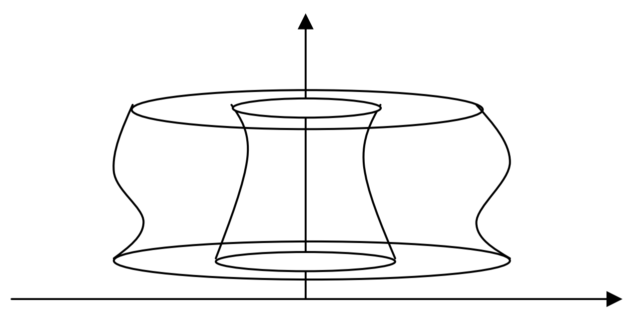
$$\Delta V \approx \pi[(1 + x^2)^2 - 1^2]\Delta x = \pi(x^4 + 2x^2)\Delta x$$

Volume benda putar:

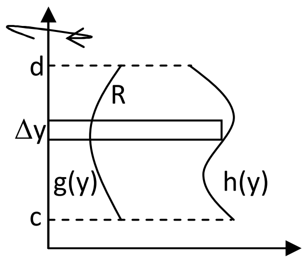
$$V = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2)\, dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2\right) = \frac{186}{15}\pi$$

B. Daerah $R = \{(x, y) | c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}$ diputar terhadap sumbu y. Berapa volume benda putar yang terjadi?





Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.



Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi h(y) – g(y) dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δy dan jari-jari luar h(y) dan jari-jari dalamnya g(y). Sehingga

$$\Delta V \approx [h^2(y) - g^2(y)]\Delta y$$

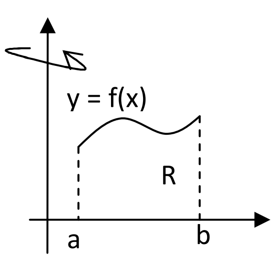
Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cincin. Dengan mengambil limitnya diperoleh

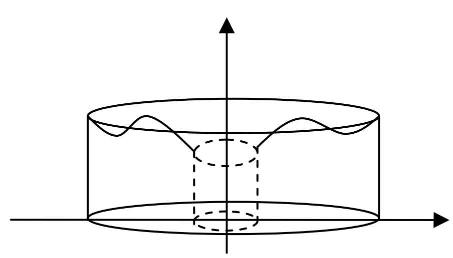
$$V = \pi \int_a^b [h^2(y) - g^2(y)]dy$$

Catatan: Metode cincin irisan dibuat tegak lurus dengan sumbu putar.

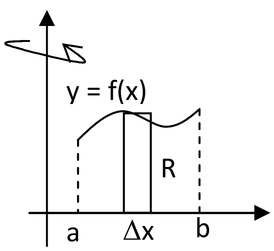
3.2.3 Metode Kulit Tabung

A. Misal daerah $R = \{(x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ diputar terhadap sumbu y. Berapa volume benda putar?



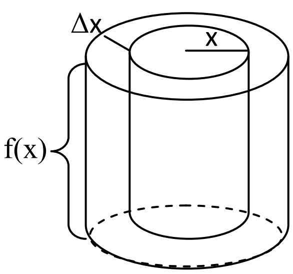


Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah, dan ambil limitnya.

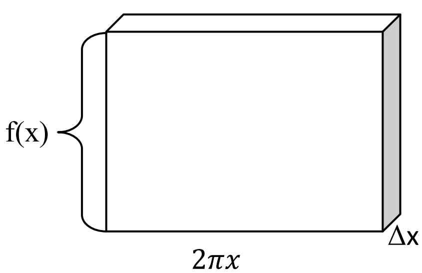


Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu tabung kosong dengan tebal Δx dan jari-jari dalam x. Sehingga

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x)\Delta x$$



Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume kulit tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

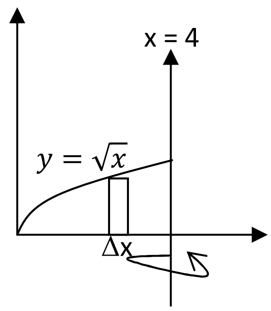


$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Contoh:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, x = 4, y = 0; mengelilingi sumbu x = 4

Jawab:



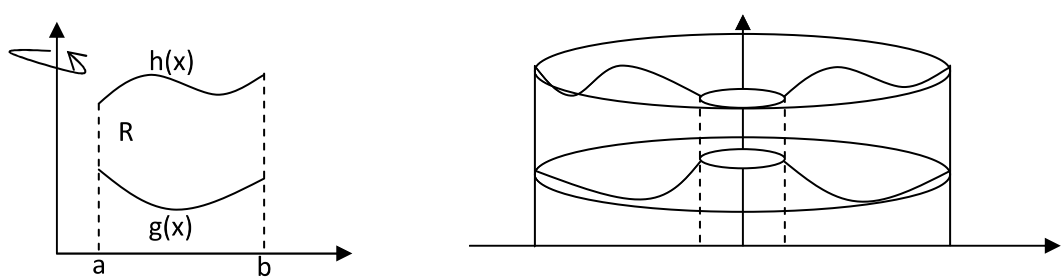
Jika irisan diputar terhadap garis x = 4 akan diperoleh suatu tabung kosong dengan jari-jari 4 – x dan tinggi tabung $\sqrt{x}$

$$\Delta V \approx 2\pi(4-x)\sqrt{x}\Delta x$$

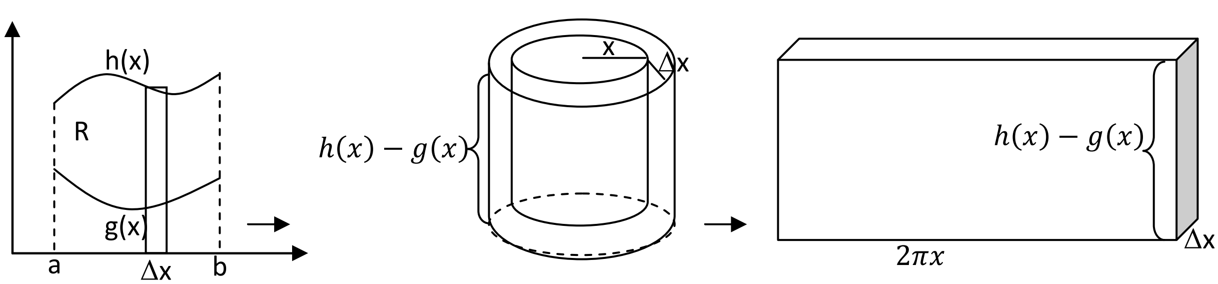
Volume benda putar:

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = 2\pi \left[\frac{8}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \Big|_0^4\right] = 17\frac{1}{15}\pi$$

B. Misal daerah $R = \{(x,y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ diputar terhadap y. Berapa volume benda putar?



Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah, dan ambil limitnya.



Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $h(x) - g(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu tabung kosong dengan tebal Δx dan jari-jari dalam tabung x. Sehingga

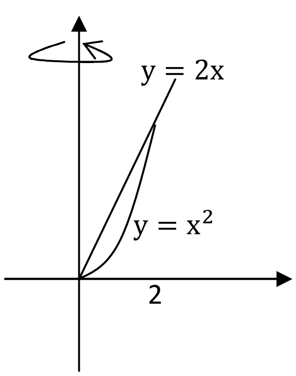
$$\Delta V \approx 2\pi x\big(h(x) - g(x)\big)\Delta x$$

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume kulit tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$V = 2\pi \int_a^b x\big(h(x) - g(x)\big)\, dx$$

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y = 2x$ mengelilingi sumbu y.

Jawab:



Titik potong:

$$x^2 = 2x \leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \leftrightarrow x(x-2) = 0$$

Jadi titik potong adalah x = 0 dan x = 2

Jika irisan diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu tabung kosong dengan jari-jari x dan tinggi tabung $2x - x^2$

$$\Delta V \approx 2\pi x(2x - x^2)\Delta x$$

Volume benda putar:

$$V = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^2\right] = \frac{8}{3}\pi$$

<u>Catatan</u>: Metode kulit tabung irisan dibuat sejajar dengan sumbu putar

3.3 Panjang Kurva

<u>Kurva Rata</u>

Kurva Rata adalah kurva yang terletak seluruhnya pada sebuah bidang.

Contoh:

- $x = y^2, -2 \leq y \leq 2$
- $x^2 + y^2 = a^2$

  $\rightarrow y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

  $\rightarrow x = g(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$

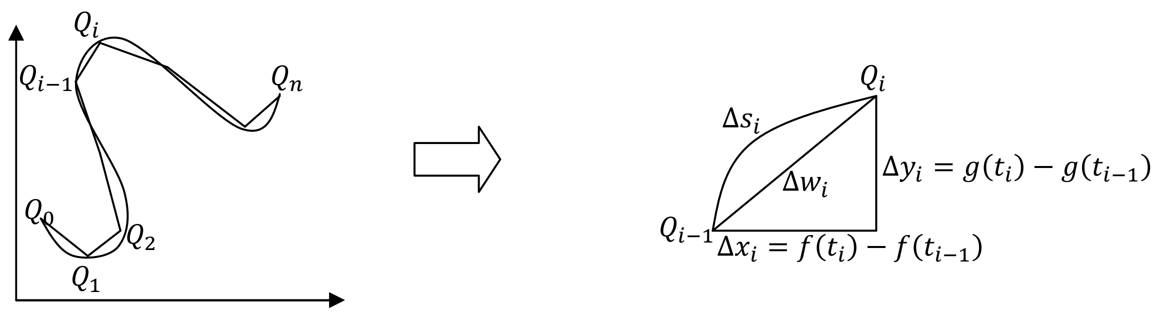
  $\rightarrow x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$, t = parameter

Sebuah kurva rata disebut mulus apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, dengan ketentuan bahwa turunan-turunan f' dan g' adalah kontinu ada [a,b] sedangkan f'(t) dan g'(t) tidak bersama-sama nol di selang [a,b].

<u>Panjang kurva</u>

Misal sebuah kurva $Q = \{(x,y) | x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b\}$. Panjang kurva tersebut adalah?

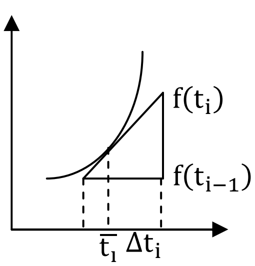
Untuk menghitung panjang kurva gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.



Hampiran $\Delta s_i \rightarrow \Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

$$= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

Gunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan



$$f'(\overline{t_i}) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{\Delta t_i} \leftrightarrow f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\overline{t_i})\Delta t_i$$

Maka Hampiran Δs_i dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan diperoleh

$$\Delta w_i = \sqrt{(f'(\overline{t_i})\Delta t_i)^2 + (g'(\widehat{t_i})\Delta t_i)^2}$$

$$= \sqrt{\left(f'(\overline{t_i})\right)^2 + \left(g'(\widehat{t_i})\right)^2}\Delta t_i$$

Panjang kurva dihampiri oleh jumlah panjang sisi miring. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Jika yang diketahui adalah kurva $y = f(x), a \leq x \leq b$, maka panjang kurva:

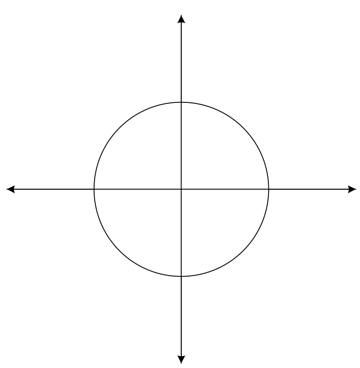
$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Jika yang diketahui adalah kurva $x = g(y), c \leq y \leq d$, maka panjang kurva:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Contoh: Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Jawab:



$x^2 + y^2 = a^2 \leftrightarrow x = a\cos t\,, y = \text{a} \sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = a \cos t$

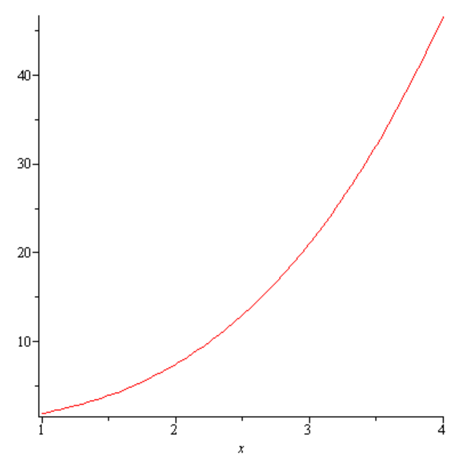
Maka

$$\Delta w \approx \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\Delta t$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (\mathrm{a}\cos t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 sin^2 t + a^2 cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} adt = at\Big|_0^{2\pi} = 2a\pi$$

Contoh: tentukan panjang ruas garis dengan persamaan $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}, 1 \le x \le 4$

Jawab:



$y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{3}{2}2x(x^2+1)^{1/2}$

$$\Delta w \approx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x$$

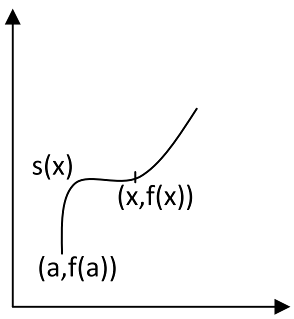
$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(2x(x^2+1)^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(4x^2(x^2+1)\right)}dx$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + 4x^4 + 4x^2}dx = \int_1^4 \sqrt{(1 + 2x^2)^2}dx = \int_1^4 (1 + 2x^2)dx = x + \frac{2}{3}x^3 \Big|_1^4 = \frac{126}{3} + 3$$

Diferensial Panjang Kurva

Misal f dapat dideferensialkan ada [a,b]. Untuk setiap $x \in [a, b]$ kita definisikan s(x) melalui

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2}du$$



Maka s(x) panjang kurva y = f(u) antara titik (a,f(a)) dan titik (x,f(x)). Maka

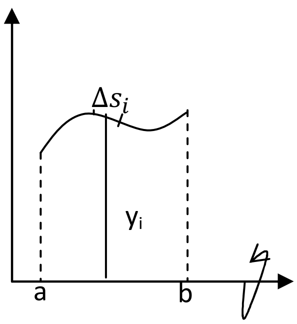
$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

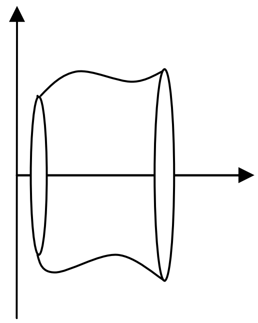
Maka

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

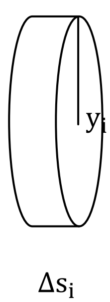
3.4 Luas Permukaan Benda Putar

A. Misal kurva $D = \{(x, y)|x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b\}$, diputar terhadap sumbu x. Berapa luas permukaan benda putar tersebut?





Untuk menghitung luas permukaan benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.



Jika irisan kurva yang berbentuk garis dan tinggi y_i terhadap sumbu x akan diperoleh tabung kosong dengan tinggi Δs_i dan jari-jari y_i. Sehingga

$$\Delta A \approx 2\pi y_i \Delta s_i$$

Luas permukaan benda putar dihampiri oleh jumlah luas permukaan tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$\Delta A = 2\pi \int_a^b y\, ds$$

Jadi jika y = f(x) maka $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$

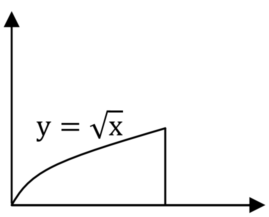
jika x = g(y) maka $A = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\,dy$

Contoh:

Tentukan luas permukaan benda putar apabila kurva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, diputar mengelilingi sumbu x.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$



Maka hampirannya: $\Delta A \approx 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$

Maka luas permukaannya: $A = 2\pi\int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = \pi\int_0^4 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx$

$$= \pi\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]\Big|_1^4 = \frac{2\pi}{3}\left[\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\right]$$