**MODUL PERKULIAHAN**

**EDISI 1**

**MATEMATIKA DISKRIT**



Penulis :

Nelly Indriani Widiastuti S.Si., M.T.

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

UNIVERSITAS KOMPUTER INDONESIA

BANDUNG

2011

|  |
| --- |
|  INDUKSI MATEMATIKA**6** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUANTUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |

**Materi :**

## **Pendahuluan**

Induksi matematika merupakan suatu teknik yang dikembangkan untuk membuktikan pernyataan. Induksi matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secara berulang sesuai dengan pola tertentu.

Contoh :

*p*(*n*):“Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai *n* adalah

*n*(*n* + 1)/2”*.*

Buktikan *p*(*n*) benar!

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

## **Prinsip Induksi Sederhana**

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif. Jika pembuktian akan dilakukan apakah p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Untuk membuktikan pernyataan ini, dapat dilakukan dengan cara pembuktian dengan 2 langkah :

1. Menunjukkan bahwa pernyataan itu berlaku untuk bilangan a, disebut **basis induksi**.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan itu berlaku untuk bilangan n, maka pernyataan itu juga berlaku untuk n+1, disebut **langkah induksi.**

Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa p(n) benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Jika dalam kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan dalam basis.

Contoh :

1. Buktikan bahwa : 1 + 2 + … + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ untuk semua bilangan bulat n ≥ 1.

Jawab :

 Langkah 1 : Basis

 Harus dibuktikan pernyataan benar untuk n ≥ 1,

 maka n = 1 (yang terkecil)

 n = $\frac{n(n+1)}{2}$

karena n = 1 🡺 ruas kiri

 maka : $\frac{1(1+1)}{2}$ 🡺 ruas kanan

 ruas kiri = ruas kanan, persamaan terbukti benar untuk n = 1

 Langkah 2 : Induktif

 Akan dibuktikan implikasi : P(n) benar => P(n + 1) benar

Karena P(n) benar dari hasil pembuktian langkah 1, berarti : 1 + 2 + … + n = $\frac{n(n+1)}{2} $🡺 Hipotesis

 Akan dibuktikan bahwa P(n+1) benar :

 1 + 2 + … + n + (n + 1) = $\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

 1 + 2 + … + n + (n +1) = (1 + 2 + … + n) + (n+1)

 = $\frac{n(n+1)}{2}$+ (n+1)

 =$ \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$ = $\frac{n^{2}+3n+2}{2}$

 = $ \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ = $\frac{\left(n+1\right)(\left(n+1\right)+1)}{2}$

Terbukti bahwa P(n+1) benar

 Disimpulkan bahwa P(n) benar untuk n ≥ 1

1. Buktikan bahwa 5n – 1 habis dibagi 4 untuk setiap n = 1, 2 ..dst.

 Jawab :

 Langkah 1 : Basis

 harus dibuktikan untuk setiap n = 1, 2,.. Dst

 maka, n = 1 (yg terkecil)

 5n – 1 = 51 – 1 = 4

 jelas sekali bahwa 5n – 1 = 4 habis dibagi 4

 Langkah 2 : Induktif

 akan dibuktikan bahwa jika P(n) benar, maka P(n+1) benar. Yaitu :

 5n – 1 = 5n+1 – 1

 = 5n. 51 – 1

 = 5n(4+1) – 1

 = (5n. 4 + 5n ) – 1 = 5n.4 + (5n – 1)

 habis dibagi 4 (hipotesis)

 maka sisa : 5n.4

 karena merupakan perkalian 4, maka jelas 5n.4 habis dibagi 4.

 Jadi, terbukti bahwa 5n – 1 habis dibagi 4 untuk setiap n =1, 2,… dst

 Jika prinsip induksi disimulasikan , maka dapat digambarkan seperti efek domino


## **Prinsip Induksi yang Dirampatkan**

Jika kita perlu membuktikan bahwa pernyataan P(n) benar untuk semua bilangan bulat ≥ n0, jadi tidak hanya bilangan bulat mulai dari 1 saja. Prinsip yang digunakan adalah prinsip induksi yang dirampatkan atau generalized. Hal ini ditunjukkan dengan cara sebagai berikut :

1. P(n0) benar, dan
2. Jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar, untuk semua bilangan bulat n ≥ n0.

**Contoh 1.** Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa 20 + 21 + 22 + … + 2*n* = 2*n*+1 - 1

Penyelesaian:

1. *Basis induksi*. Untuk *n* = 0 (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh

 20 = 20+1 – 1.

 Ini jelas benar, sebab 20 = 1 = 20+1 – 1

 = 21 – 1

 = 2 – 1

 = 1

*(ii) Langkah induksi*. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

 20 + 21 + 22 + … + 2n = 2*n*+1 - 1

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

 20 + 21 + 22 + … + *2n* + 2*n*+1 = 2(*n*+1) + 1 - 1

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

 20 + 21 + 22 + … + 2*n* + 2*n*+1 = (20 + 21 + 22 + … + 2*n*) + 2*n*+1

 = (2*n*+1 – 1) + 2*n*+1 (hipotesis induksi)

 = (2*n*+1 + 2*n*+1) – 1

 = (2 . 2*n*+1) – 1

 = 2*n*+2 - 1

 = 2(*n*+1) + 1 – 1

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa 20 + 21 + 22 + … + 2*n* = 2*n*+1 – 1

**LATIHAN**

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan *n* elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2*n*.
2. Buktikan pernyataan “Untuk membayar biaya pos sebesar *n* sen (*n* ≥ 8) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen” benar.
3. Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

## **Prinsip Induksi Kuat**

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat n ≥ n0. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. p(n0) benar, dan
2. jika p(n0 ), p(n0+1), …, p(n) benar maka p(n+1) juga benar untuk semua bilangan bulat n ≥ n0,.

**Contoh 7.** Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif *n* (*n* ≥ 2) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

*Basis induksi*. Jika *n* = 2, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

*Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, *n* dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa *n* + 1 juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai n + 1:

1. Jika *n* + 1 sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
2. Jika *n* + 1 bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif *a* yang membagi habis *n* + 1 tanpa sisa. Dengan kata lain,

(*n* + 1)/ *a* = *b* atau (*n* + 1) = *ab*

yang dalam hal ini, 2 ≤ *a* ≤ *b* ≤ *n*. Menurut hipotesis induksi, *a* dan *b* dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, *n* + 1 jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena *n* + 1 = *ab*.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif *n* (*n* ≥ 2) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

## **Latihan**

1. Jika *A*1, *A*2, …, *An* masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematik hukum De Morgan rampatan berikut:

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa *n*5 – *n* habis dibagi 5 untuk *n* bilangan bulat positif.
2. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika ada *n* orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah *n*(*n* – 1)/2.
3. Perlihatkan bahwa [(*p*1 → *p*2) ∧ (*p*2 → *p*3) ∧ … ∧ (*pn*–1 → *pn*)] → [(*p*1 ∧ *p*2 ∧ … ∧ *pn*–1)→ *pn*] adalah tautologi bilamana *p*1, *p*2, …, *pn* adalah proposisi.