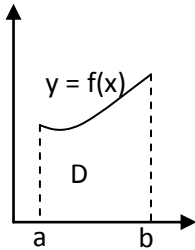


## INTEGRAL TERTENTU

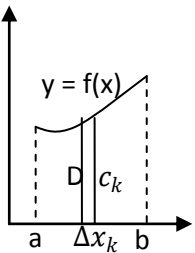
Integral tentu dikonstruksi dengan jumlah Riemann yang menggambarkan luas daerah.

Misal fungsi  $f(x)$  terdefinisi pada selang tutup  $[a, b]$ .  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$



Langkah-langkah :

1. Partiskan selang  $[a, b]$  menjadi  $n$  selang dengan titik pembagian  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$   
 $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  disebut partisi dari  $[a, b]$
2. Definisikan panjang partisi  $P$ , sebagai  
 $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_k|, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
3. Pilih  $c_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n$
4. Bentuk jumlah Riemann:  $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$



Jika  $\|P\| \rightarrow 0$  maka diperoleh limit jumlah Riemann  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$   
 Jika limit ini ada, maka dikatakan  $f$  terintegralkan Riemann pada selang  $[a, b]$  dan ditulis sebagai

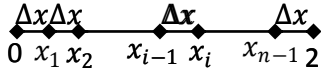
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

Contoh:

Hitung  $\int_0^2 (x - 2) dx$  berdasarkan definisi integral

**Jawab:**

1. Partiskan selang  $[0, 2]$  menjadi  $n$  bagian yang sama panjang  $\rightarrow \Delta x = \frac{2}{n}$



Sehingga

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0 + \Delta x = \frac{2}{n} \\ x_2 &= 0 + 2\Delta x = \frac{4}{n} \\ &\vdots \\ x_i &= 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n} \\ &\vdots \\ x_n &= 0 + n\Delta x = 2 \end{aligned}$$

2. Pilih  $c_i = x_i$  maka  $f(c_i) = f(x_i) = x_i - 2 = \frac{2i}{n} - 2$

3. Bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{n} - 2 \right) \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{4i}{n^2} - \frac{4}{n} \right) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{4}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{4}{n} n = -2 + \frac{2}{n}$$

4. Jika  $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^2 (x-2)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{2}{n}\right) = -2$$

Catatan : Jika fungsi  $y = f(x)$  positif pada selang  $[a,b]$  maka integral tentu di atas menyatakan luas daerah yang terletak dibawah grafik  $y = f(x)$  dan daerah sumbu  $x$  antara garis  $x = a$  dan  $x = b$ .

**Sifat-sifat Integral tentu:**

Andaikan bahwa  $f$  dan  $g$  terintegralkan pada  $[a,b]$  dan bahwa  $k$  konstanta. Maka  $kf$  dan  $f + g$  adalah terintegralkan dan

1.  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
2.  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. Jika  $a < b < c$ , maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

4.  $\int_a^a f(x)dx = 0$  dan  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. Jika  $f(x)$  ganjil, maka  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
6. Jika  $f(x)$  genap, maka  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

**Teorema Dasar Kalkulus I**

Misal  $f(x)$  kontinu pada  $[a,b]$  dan  $f(x)$  suatu anti turunan dari  $F(x)$ . Maka  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Contoh: Selesaikan integral tentu  $\int_0^2 x^2 dx$

Jawab:

Berdasarkan soal di atas  $f(x) = x^2$ , dan diketahui bahwa anti turunannya  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ . Maka

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}2^3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3\right] = \frac{8}{3}$$

**Teorema Dasar Kalkulus II**

Jika fungsi  $f$  kontinu pada selang tertutup  $[a,b]$  dan andaikan  $x$  sebuah titik dalam  $[a,b]$ . Maka

$$D_x \left[ \int_a^x f(u)du \right] = f(x)$$

Secara umum

$$D_x \left[ \int_a^{v(x)} f(u)du \right] = f(v(x))v'(x)$$

$$D_x \left[ \int_{v(x)}^{w(x)} f(u)du \right] = f(w(x))w'(x) - f(v(x))v'(x)$$

Contoh: Hitung  $f'(x)$  dari  $f(x) = \int_4^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

Jawab:  $f'(x) = \sqrt{1+x^4}(2x)$

Latihan Halaman 283 no 11,14, latihan 289 no 3, 21

Daftar Pustaka

Purcell & Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Erlangga: 1992