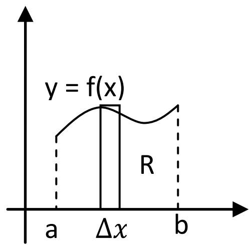
APLIKASI INTEGRAL

A. Luas Daerah Bidang Rata

1. Misalkan daerah $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Luas R?



Langkah-langkah:

1. Iris R menjadi n bagian dari luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi f(x). alas (lebar) Δx

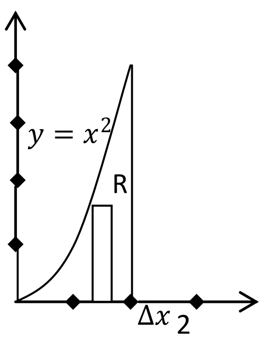
$$\Delta A \approx f(x)\Delta x$$

2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas R} = A = \int_a^b f(x)dx$$

Contoh:

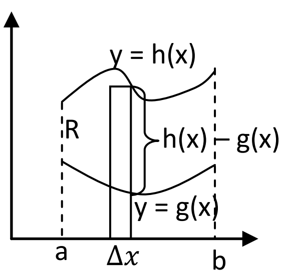
Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x dan x = 2?



Luas irisan : $\Delta A \approx x^2 \Delta x$

Luas daerah : $A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

2. Misalkan daerah $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Luas R?



Langkah:

1. Iris R menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi (h(x) – g(x)) dan alas Δx

$$\Delta A \approx [h(x) - g(x)]\Delta x$$

2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$\text{Luas R} = A = \int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx$$

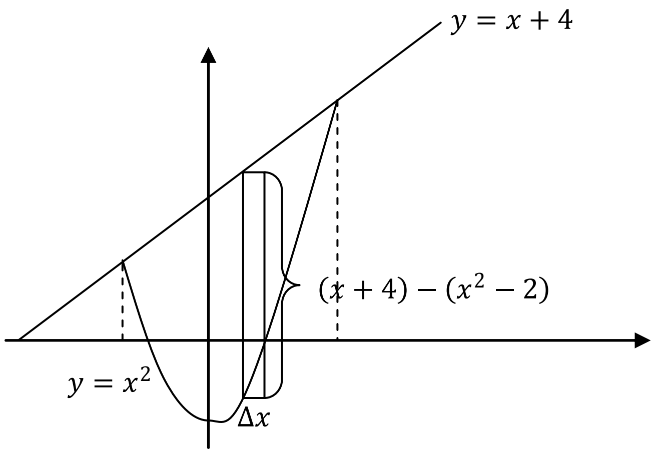
Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola $y = x^2 - 2$

Jawab:

Titik potong antara garis dan parabola:

$x + 4 = x^2 - 2 \leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

Maka titik potongnya : x = 3 dan x = -2



Luas irisan :

$$\Delta A \approx [(x + 4) - (x^2 - 2)]\Delta x$$

Sehingga luas daerah:

$$A = \int_{-2}^{3} [(x + 4) - (x^2 - 2)]\, dx$$

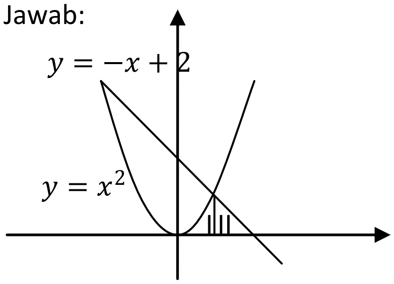
$$= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \Big|_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

Catatan : Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak di atas dikurangi kurva yang dibawahnya. Jika batas atas dan batas bawah irisan berubah untuk sebarang irisan di R maka daerah R harus dibagi dua atau lebih.

Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, $y = x^2$ dan $y = -x + 2$

Jawab:



Jika dibuat irisan yang tegak lurus dengan sumbu x, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian.

Luas daerah I: $\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

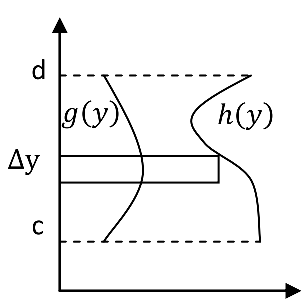
Luas daerah II: $\Delta A_2 \approx (-x + 2)\Delta x$

$$A_2 = \int_1^2 (-x + 2)dx = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Sehingga luas daerah:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

3. Misalkan daerah $R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$. Luas R?



Langkah:

1. Iris R menjadi n selang dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi dengan tinggi [h(y) - g(y)] dan alas Δy

$$\Delta A \approx [h(y) - g(y)]\Delta y$$

2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas R} = A = \int_c^d [h(y) - g(y)]dy$$

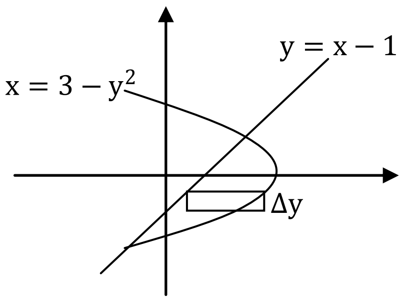
Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $x = 3 - y^2$ dan $y = x - 1$

Jawab:

Titik potong:

$$y + 1 = 3 - y^2 \leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \leftrightarrow (y + 2)(y - 1) = 0$$

Jadi titik potongnya: y = -2 dan y = 1



Luas irisan : $\Delta A \approx [(3 - y^2) - (y + 1)]\Delta y$
Sehingga luas daerah:
Luas daerah $= A = \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]dy$

$$= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y \Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

Catatan: Jika irisan sejajar dengan sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang terletak disebelah kiri. Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sebarang irisan R maka daerah R harus dibagi dua atau lebih.