

TEORI DUALITAS

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL
Pertemuan Ke-10 & 11

Riani Lubis
Jurusan Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

PENGANTAR

- Konsep dualitas menjelaskan secara matematis bahwa sebuah kasus PL berhubungan dengan kasus PL yang lainnya.
- Istilah dualitas menunjuk pada kenyataan bahwa setiap LP terdiri atas dua bentuk, yaitu :
 - Primal : bentuk pertama persamaan PL
 - Dual : bentuk kedua persamaan PL yang berhubungan dengan bentuk pertamanya.
- Penyelesaian kasus Primal secara otomatis akan menyelesaikan kasus dual, dan demikian pula sebaliknya.

Bentuk Umum Primal-Dual Simetrik (1)

Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{F.Pembatas} : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Dual :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Min } W = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

$$\text{F.Pembatas} : a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$$

...

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

Bentuk Umum Primal-Dual Simetrik (2)

Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \quad \text{Min} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{F.Pembatas} \quad : \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Dual :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \quad \text{Maks} \quad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

$$\text{F.Pembatas} \quad : \quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$$

...

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

Hubungan Primal-Dual Simetrik (1)

1. Koefisien fungsi tujuan pada masalah primal menjadi ruas kanan kendala fungsional pada masalah dualnya. Sebaliknya, ruas kanan kendala fungsional pada masalah primal menjadi koefisien fungsi tujuan pada masalah dual.
2. Tanda pertidaksamaan kendala dibalik.
3. Tujuan diubah dari minimasi dalam masalah primal menjadi maksimasi dalam masalah dual, dan demikian pula berlaku sebaliknya.

Hubungan Primal-Dual Simetrik (2)

4. Setiap kolom kendala fungsional pada masalah primal berhubungan dengan satu baris kendala fungsional pada masalah dual. Sehingga banyaknya kendala fungsional pada masalah dual sama dengan banyaknya variabel pada masalah primal.
5. Setiap baris kendala fungsional pada masalah primal berhubungan dengan suatu kolom dalam masalah dual. Sehingga ada satu variabel pada masalah dual untuk setiap kendala pada masalah primal.
6. Bentuk dual dari masalah dual adalah bentuk primal.

Contoh

Primal :

Minimumkan $Z =$

$$5X_1 + 2X_2 + X_3$$

Pembatas : (1)

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$

(2)

$$6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \geq 30$$

(3)

$$7X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 40$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Dual :

Maksimumkan $W =$

$$20X_1 + 30X_2 + 40X_3$$

Pembatas :

(1)

$$2Y_1 + 6Y_2 + 7Y_3 \leq 5$$

(2)

$$3Y_1 + 8Y_2 + Y_3 \leq 2$$

(3)

$$Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 \leq 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Contoh 1

PT. XY adalah sebuah perusahaan furnitur yang memproduksi meja, kursi dan rak buku yang harus melalui proses perakitan, pemolesan, dan pengepakan. Data waktu yang dibutuhkan setiap jenis produk terhadap proses dan waktu yang tersedia dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

PROSES	WAKTU YANG DIBUTUHKAN (JAM/UNIT)			WAKTU YANG TERSEDIA
	MEJA	KURSI	RAK BUKU	
Perakitan	3	4	2	60
Pemolesan	2	1	2	40
Pengepakan	1	3	2	80
Laba (\$/Unit)	2	4	3	

- **PRIMAL :**

Dipusatkan pada kontribusi ketiga produk

Variabel Keputusan : x_1 = jumlah produksi meja
 x_2 = jumlah produksi kursi
 x_3 = jumlah produksi rak buku

Fungsi Tujuan :

Maksimasi $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ (Laba/Unit produk)

Fungsi Pembatas :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 60 \text{ (kebutuhan waktu proses perakitan)} \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 40 \text{ (kebutuhan waktu proses pemolesan)} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 80 \text{ (kebutuhan waktu proses pengepakan)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jika dibayangkan ; diperlukan biaya untuk masing-masing proses tersebut di atas (misal biaya tenaga kerja) yang sesuai dengan kapasitas masing-masing.

- **DUAL :**

Dipusatkan pada penilaian waktu yang digunakan dalam tiga fungsi untuk memproduksi ketiga jenis produk.

Asumsi :

y_1 = biaya tenaga kerja/jam untuk proses perakitan

y_2 = biaya tenaga kerja/jam untuk proses pemolesan

y_3 = biaya tenaga kerja/jam untuk proses pengepakan

Fungsi Tujuan :

Minimasi

$$W = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3 \quad (\text{biaya tenaga kerja ketiga proses})$$

Fungsi Pembatas :

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \quad (\text{waktu proses produksi meja})$$

$$4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \quad (\text{waktu proses produksi kursi})$$

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \quad (\text{waktu proses produksi rak buku})$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Contoh 2

Sebuah toko yang menjual keperluan pertanian menyediakan dua merek pupuk kimia (Pupuk A dan Pupuk B). Setiap jenis pupuk mengandung campuran bahan Nitrogen dan fosfat dalam jumlah tertentu.

JENIS	KANDUNGAN BAHAN KIMIA	
	NITROGEN (KG/SAK)	FOSFAT (KG/SAK)
Jenis A	2	4
Jenis B	4	3

Seorang petani membutuhkan paling sedikit 16 Kg Nitrogen dan 24 Kg Fosfat untuk lahan pertaniannya. Harga Pupuk A dan Pupuk B masing-masing \$6 dan \$3. Petani tersebut ingin mengetahui berapa sak masing-masing jenis pupuk harus dibeli agar kebutuhan pupuk untuk lahannya terpenuhi.

Variabel Keputusan : x_1 = jumlah sak pupuk A
 x_2 = jumlah sak pupuk B

PRIMAL :

Fungsi Tujuan :

Minimalkan $Z = 6x_1 + 3x_2$

Fungsi Pembatas :

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

DUAL :

Fungsi Tujuan :

Maksimalkan $W = 16y_1 + 24y_2$

Fungsi Pembatas :

$$2y_1 + 4y_2 \leq 6$$

$$4y_1 + 3y_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

PRIMAL :

Fungsi Tujuan :

Minimalkan $Z = 6x_1 + 3x_2$

Fungsi Pembatas : $2x_1 + 4x_2 \geq 16$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

STANDAR PRIMAL :

Fungsi Tujuan :

Minimalkan $Z = 6x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2$

Fungsi Pembatas : $2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

Fungsi tujuan (baru) :

Minimalkan $Z - (6 - 6M)x_1 - (3 - 7M)x_2 - MS_1 - MS_2 = 40M$

ITERASI	BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	R ₁	R ₂	SOLUSI	RASIO
0	Z	1	$(-6+6M)$	$(-3+7M)$	-M	-M	0	0	40M	
	R ₁	0	2	4	-1	0	1	0	16	4
	R ₂	0	4	3	0	-1	0	1	24	8
1	Z	1	$(-\frac{9}{2} + \frac{5M}{2})$	0	$(-\frac{3}{4} + \frac{3M}{4})$	-M	$(\frac{3}{4} - \frac{7M}{4})$	0	12+12M	
	X ₂	0	1/2	1	-1/4	0	1/4	0	4	8
	R ₂	0	5/2	0	3/4	-1	-3/4	1	12	24/5
2	Z	1	0	0	3/5	-9/5	$(\frac{3}{5} - M)$	$(\frac{9}{5} - M)$	168/5	
	X ₂	0	0	1	-2/5	1/5	2/5	-1/5	8/5	-4
	X ₁	0	1	0	3/10	-2/5	-3/10	2/5	24/5	16
3	Z	1	-2	0	0	-1	$(\frac{6}{5} - M)$	$(\frac{13}{5} - M)$	24	
	X ₂	0	4/3	1	0	-1/3	0	1/3	8	
	S ₁	0	10/3	0	1	-4/3	-1	4/3	16	

Solusi optimum : $X_1 = 0$, $X_2 = 8$ dan $Z = 24$

DUAL:

Fungsi Tujuan : Maksimalkan $W = 16y_1 + 24y_2$

Fungsi Pembatas : $2y_1 + 4y_2 \leq 6$
 $4y_1 + 3y_2 \leq 3$
 $y_1, y_2 \geq 0$

STANDAR DUAL:

Fungsi Tujuan : Maksimalkan $W = 16y_1 + 24y_2$

Fungsi Pembatas : $2y_1 + 4y_2 + S_1 = 6$
 $4y_1 + 3y_2 + S_2 = 3$
 $y_1, y_2, S_1, S_2 \geq 0$

Iterasi	Basis	W	y_1	y_2	S_1	S_2	Solusi	Rasio
0	W	1	-16	-24	0	0	0	
	S_1	0	2	4	1	0	6	3/2
	S_2	0	4	3	0	1	3	1
1	z	1	16	0	0	8	24	
	S_1	0	-3 1/3	0	1	-4/3	2	
	y_2	0	4/3	1	0	1/3	1	

- y_1 pada dual berkorespondensi dengan S_1 pada primal
- y_2 pada dual berkorespondensi dengan S_2 pada primal
- S_1 pada dual berkorespondensi dengan x_1 pada primal
- S_2 pada dual berkorespondensi dengan x_2 pada primal

Maka :

$$S_1 \text{ (dual)} \approx x_1 \text{ (primal)} = 0$$

$$S_2 \text{ (dual)} \approx x_2 \text{ (primal)} = 8$$

$$W \text{ (dual)} \approx Z \text{ (primal)} = 24$$

Bentuk Umum Primal-Dual Asimetrik

Primal :

F. Tujuan : Min/Maks $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

F.Pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Hal yang Harus Diperhatikan pada Primal-Dual Asimetri

1. Persoalan :
 - Maksimasi : Jika kendala primal ke-i bertanda ' \geq ', maka variabel dual yang berkorespondensi dengan kendala tersebut akan memenuhi $y_i \leq 0$.
 - Minimasi : Jika kendala primal ke-i bertanda ' \leq ', maka variabel dual yang berkorespondensi dengan kendala tersebut akan memenuhi $y_i \leq 0$.
2. Jika kendala primal ke-i bertanda '=', maka variabel dual yang berkorespondensi dengan kendala tersebut akan tidak terbatas dalam tanda.
3. Jika variabel primal ke-i tidak terbatas dalam tanda, maka kendala dual ke-i akan bertanda '='.

Transformasi PL Asimetri menjadi Simetri

1. Kalikan setiap kendala ' \geq ' (pada fungsi tujuan maksimasi) atau kendala ' \leq ' (pada fungsi tujuan minimasi) dengan bilangan (-1).
2. Ganti setiap kendala '=' dengan dua ketidaksamaan kendala (' \geq ' dan ' \leq ').
3. Ganti setiap variabel x_j tak terbatas menjadi $x_j = x_j' - x_j''$ dimana $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$.

Contoh

Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{F.Pembatas} : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 25$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Cara 1

1. Ganti kendala '=' dengan dua ketidaksamaan kendala (' \geq ' dan ' \leq ').
2. Karena fungsi tujuannya maksimasi, maka kalikan kendala ' \geq ' dengan bilangan (-1).

Primal :

F. Tujuan : Maks $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

F.Pembatas : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 25$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 15$

$(2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 15) \times (-1)$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$



Primal :

F. Tujuan : Maks $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

F.Pembatas : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 25$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 15$

$-2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq -15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Dual :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Min } W = 25y_1 + 15y_2' - 15y_2''$$

$$\text{F.Pembatas} : y_1 + 2y_2' - 2y_2'' \geq 1$$

$$2y_1 + y_2' - y_2'' \geq 2$$

$$2y_1 - 3y_2' + 3y_2'' \geq -3$$

$$-3y_1 + 2y_2' - 2y_2'' \geq 4$$

$$y_1 \geq 0 \text{ dan } y_2 \text{ tidak terbatas dalam tanda}$$

Atau

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Min } W = 25y_1 + 15(y_2' - y_2'')$$

$$\text{F.Pembatas} : y_1 + 2(y_2' - y_2'') \geq 1$$

$$2y_1 + (y_2' - y_2'') \geq 2$$

$$2y_1 - 3(y_2' - y_2'') \geq -3$$

$$-3y_1 + 2(y_2' - y_2'') \geq 4$$

$$y_1 \geq 0 \text{ dan } y_2 \text{ tidak terbatas dalam tanda}$$

Cara 2

Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{F.Pembatas} : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 25$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Standar Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - MR_2$$

F.Pembatas :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + S_1 = 25$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + R_2 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, R_2 \geq 0$$

Dual :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Min } W = 25y_1 + 15y_2$$

$$\text{F.Pembatas} : y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$2y_1 - 3y_2 \geq -3$$

$$-3y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$y_1 + 0y_2 \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0$$

y_2 tidak terbatas dalam tanda

- Catatan :
 - Varibel artifisial tidak diperhatikan
 - Karena y_2 tidak terbatas dalam tanda, maka y_2 memiliki dua harga yaitu $y_2 = (y_2' - y_2'')$

Standar Dual :

F. Tujuan :

$$\text{Min } W = 25y_1 + 15(y_2' - y_2'') + MR_1 + MR_2 + MR_3 + MR_4$$

F. Pembatas :

$$y_1 + 2(y_2' - y_2'') - S_1 + R_1 = 1$$

$$2y_1 + (y_2' - y_2'') - S_2 + R_2 = 2$$

$$2y_1 - 3(y_2' - y_2'') - S_3 + R_3 = -3$$

$$-3y_1 + 2(y_2' - y_2'') - S_4 + R_4 = 4$$

$$y_1, y_2', y_2'', S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3, R_4 \geq 0$$

Sifat-Sifat Primal-Dual (1)

- **Sifat 1 :**

Menentukan koefisien fungsi tujuan variabel-variabel basis awal

Caranya :

a.
$$\left[\begin{array}{l} \text{Koefisien fungsi} \\ \text{tujuan yang original} \\ \text{dari variabel basis} \\ \text{pada iterasi ybs} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi yang} \\ \text{bersangkutan} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Simplex} \\ \text{multiplier} \end{array} \right]$$

b. Kurangi nilai-nilai simpleks multiplier dengan fungsi tujuan yang original dari baris-baris awal.

Sifat-Sifat Primal-Dual (2)

- **Sifat 2 :**

Menentukan koefisien fungsi tujuan variabel-variabel non basis awal

Caranya :

- a. Substitusikan simpleks multiplier pada variabel-variabel pembatas dual
- b. Cari selisih antara ruas kiri & ruas kanan dari pembatas dua

Sifat-Sifat Primal-Dual (3)

- **Sifat 3 :**

Menentukan nilai ruas kanan (solusi) dari variabel-variabel basis

Caranya :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi ybs} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Matriks kolom ruas} \\ \text{kanan yang original} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Matriks kolom ruas} \\ \text{kanan variabel} \\ \text{basis} \end{array} \right]$$

Sifat-Sifat Primal-Dual (4)

- **Sifat 4 :**

Menentukan koefisien pembatas

Caranya :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi ybs} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Matriks kolom dari} \\ \text{kolom koefisien} \\ \text{pembatas yang} \\ \text{original} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Matriks kolom dari} \\ \text{kolom koefisien} \\ \text{pembatas pada} \\ \text{iterasi ybs} \end{array} \right]$$

Contoh

Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

$$\text{F.Pembatas} \quad : 4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Standar Primal/Standar Simpleks :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

$$\text{F.Pembatas} \quad : 4x_1 - 4x_2 + S_1 = 5$$

$$-x_1 + 6x_2 + S_2 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + S_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Jika salah satu iterasinya adalah sbb (belum tentu tabel optimal):

BASIS	Z	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI
Z	1	d	e	f	a	b	c	t
X ₁	0	j	m	q	6/20	4/20	0	g
X ₂	0	k	n	r	1/20	4/20	0	h
S ₃	0	l	p	s	5/20	0	1	i

Diagram labels and connections:

- Sifat 2** points to the cell containing X_2 (row Z, column X₂).
- Sifat 1** points to the cell containing S_2 (row Z, column S₂).
- Sifat 4** points to the cell containing X_2 (row X₁, column X₂).
- Variabel matriks** points to the cell containing S_2 (row X₁, column S₂).
- Sifat 3** points to the cell containing S_3 (row X₁, column S₃).

- Sifat 1 : mencari Simpleks Multifier (SM)

$$SM = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh :

$$a \Rightarrow 3/2 - S_1 = 3/2 - 0 = 3/2$$

$$b \Rightarrow 2 - S_2 = 2 - 0 = 2$$

$$c \Rightarrow 0 - S_3 = 0 - 0 = 0$$

Sifat 1

BASIS	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	d	e	f	$3/2$	2	0	t
X_1	0	j	m	q	$6/20$	$4/20$	0	g
X_2	0	k	n	r	$1/20$	$4/20$	0	h
S_3	0	l	p	s	$5/20$	0	1	i

- Sifat 2 :

F.Pembatas Dual :

$$\begin{aligned}4y_1 - y_2 - y_3 &\geq 4 \\ -4y_1 + 6y_2 + y_3 &\geq 6 \\ y_3 &\geq 2\end{aligned}$$

Dimana dari sifat 1 diperoleh :

$$SM = [3/2 \quad 2 \quad 0] = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]$$

Jadi diperoleh :

$$d \Rightarrow 4(3/2) - 2 - 0 - 4 = 0$$

$$e \Rightarrow -4(3/2) + 6(2) + 0 - 6 = 0$$

$$f \Rightarrow 0 - 2 = -2$$

Sifat 2

Sifat 1

BASIS	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	-2	$3/2$	2	0	t
X_1	0	j	m	q	$6/20$	$4/20$	0	g
X_2	0	k	n	r	$1/20$	$4/20$	0	h
S_3	0	l	p	s	$5/20$	0	1	i

- Sifat 3 :

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/4 \\ 6 \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$$

maka diperoleh :

$$g \Rightarrow 5/2$$

$$h \Rightarrow 5/4$$

$$i \Rightarrow 6 \frac{1}{4}$$

Sifat 2

Sifat 1

BASIS	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	-2	$3/2$	2	0	t
X_1	0	j	m	q	$6/20$	$4/20$	0	$5/2$
X_2	0	k	n	r	$1/20$	$4/20$	0	$5/4$
S_3	0	l	p	s	$5/20$	0	1	$6 \frac{1}{4}$

Sifat 3

- Sifat 4 :

$$\begin{array}{ccc|c}
 \boxed{6/20} & \boxed{4/20} & \boxed{0} & \boxed{4} \\
 \boxed{1/20} & \boxed{4/20} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\
 \boxed{5/20} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{-1}
 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} j \\ k \\ l \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 \boxed{6/20} & \boxed{4/20} & \boxed{0} & \boxed{-4} \\
 \boxed{1/20} & \boxed{4/20} & \boxed{0} & \boxed{6} \\
 \boxed{5/20} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1}
 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} m \\ n \\ p \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 \boxed{6/20} & \boxed{4/20} & \boxed{0} & \boxed{0} \\
 \boxed{1/20} & \boxed{4/20} & \boxed{0} & \boxed{0} \\
 \boxed{5/20} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1}
 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} q \\ r \\ s \end{array}$$

BASIS	Z	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI
Z	1	0	0	-2	3/2	2	0	t
X ₁	0	1	0	0	6/20	4/20	0	5/2
X ₂	0	0	1	0	1/20	4/20	0	5/4
S ₃	0	0	0	1	5/20	0	1	6 1/4

Sifat 2
Sifat 1

Sifat 4
Sifat 3

- Untuk mencari nilai “t”, masukkan nilai-nilai X_1 , X_2 , dan X_3 yang sudah diketahui pada fungsi tujuan original :

$$t = 4 (5/2) + 6 (5/4) + 2(0) = 17 \frac{1}{2}$$

BASIS	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	-2	$3/2$	2	0	$17 \frac{1}{2}$
X_1	0	1	0	0	$6/20$	$4/20$	0	$5/2$
X_2	0	0	1	0	$1/20$	$4/20$	0	$5/4$
S_3	0	0	0	1	$5/20$	0	1	$6 \frac{1}{4}$