

# MODEL TRANSPORTASI - I

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-6

Riani Lubis

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

# PENGANTAR

- Terdapat bermacam-macam *network* model.
- *Network* :
  - Suatu sistem saluran-saluran yang menghubungkan titik-titik yang berlainan.
  - Susunan titik (node) dan garis yang menghubungkan node-node.
- Contoh *network* : jaringan rel kereta api, sistem saluran pipa, jaringan jalan raya, jaringan penerbangan dll.
- Banyak masalah jaringan dapat dirumuskan sebagai masalah PL & solusinya diperoleh dengan menggunakan metode simpleks.
- Salah satu teknik lain yang lebih efisien daripada metode simpleks adalah metode transportasi, karena masalah transportasi adalah salah satu contoh dari model jaringan yang memiliki ciri-ciri yang sama.

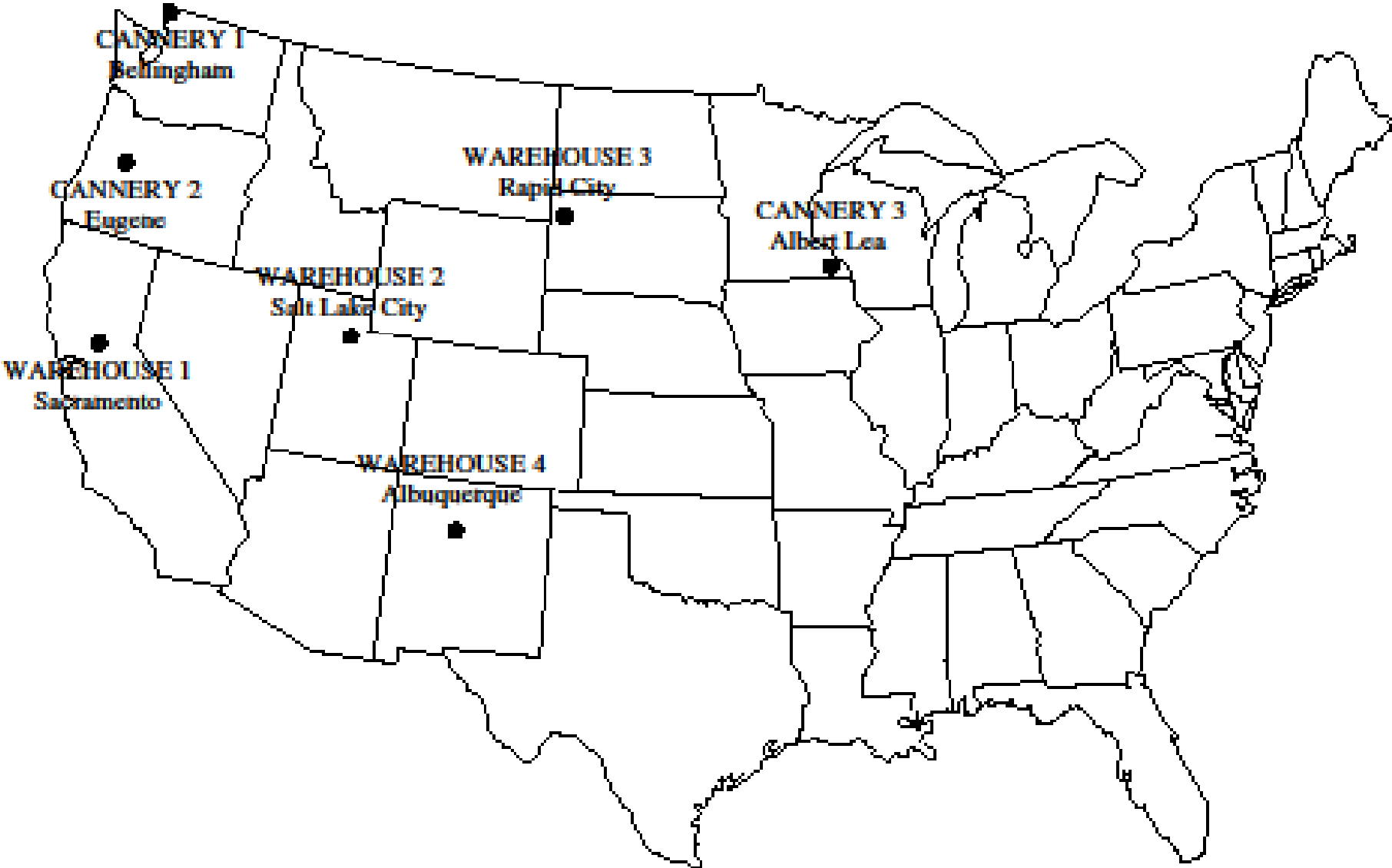
# Persoalan Transportasi (1)

- Persoalan transportasi terpusat pada pemilihan rute dalam jaringan distribusi produk antara pusat industri dan distribusi gudang atau antara distribusi gudang regional dan distribusi pengeluaran lokal.
- Pada umumnya, masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu **produk tunggal** dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan, dengan permintaan tertentu, pada biaya transpor minimum. Karena ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.

# Persoalan Transportasi (2)

- Persoalan transportasi merupakan persoalan linier khusus yang disebut persoalan aliran network.
- Asumsi dasar model transportasi adalah bahwa **biaya transpor** pada suatu rute tertentu **proporsional** dengan **banyaknya unit** yang dikirimkan.
- Tujuan dari model transportasi adalah merencanakan pengiriman dari sumber-sumber ke tujuan sedemikian rupa untuk **meminimumkan total biaya transportasi**, dengan kendala-kendala :
  - Setiap **permintaan** tujuan **terpenuhi**
  - Sumber **tidak** mungkin **mengirim** komoditas **lebih besar** dari **kapasitasnya**.

# Contoh



Misal sebuah perusahaan pengalengan mempunyai 3 pabrik pengalengan (sumber) yang harus melakukan distribusi ke 4 gudang (tujuan). Setiap pabrik memiliki kapasitas produksi tertentu dan setiap gudang memiliki jumlah permintaan tertentu terhadap produk tersebut. Biaya transpor per unit dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang berbeda-beda. Masalah yang timbul adalah menentukan jumlah barang yang harus dikirim dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang dengan tujuan meminimumkan biaya transpor.

- Suatu model transportasi dikatakan seimbang (*balanced* program), jika total jumlah antara penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand*) sama :

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$$

- Dan dikatakan tidak seimbang (*unbalanced* program), jika kapasitas sumber lebih besar dari kapasitas tujuan atau sebaliknya :

$$\sum_{i=1}^m S_i < \sum_{j=1}^n D_j \quad \text{atau} \quad \sum_{i=1}^m S_i > \sum_{j=1}^n D_j$$

# Perumusan Model Transportasi

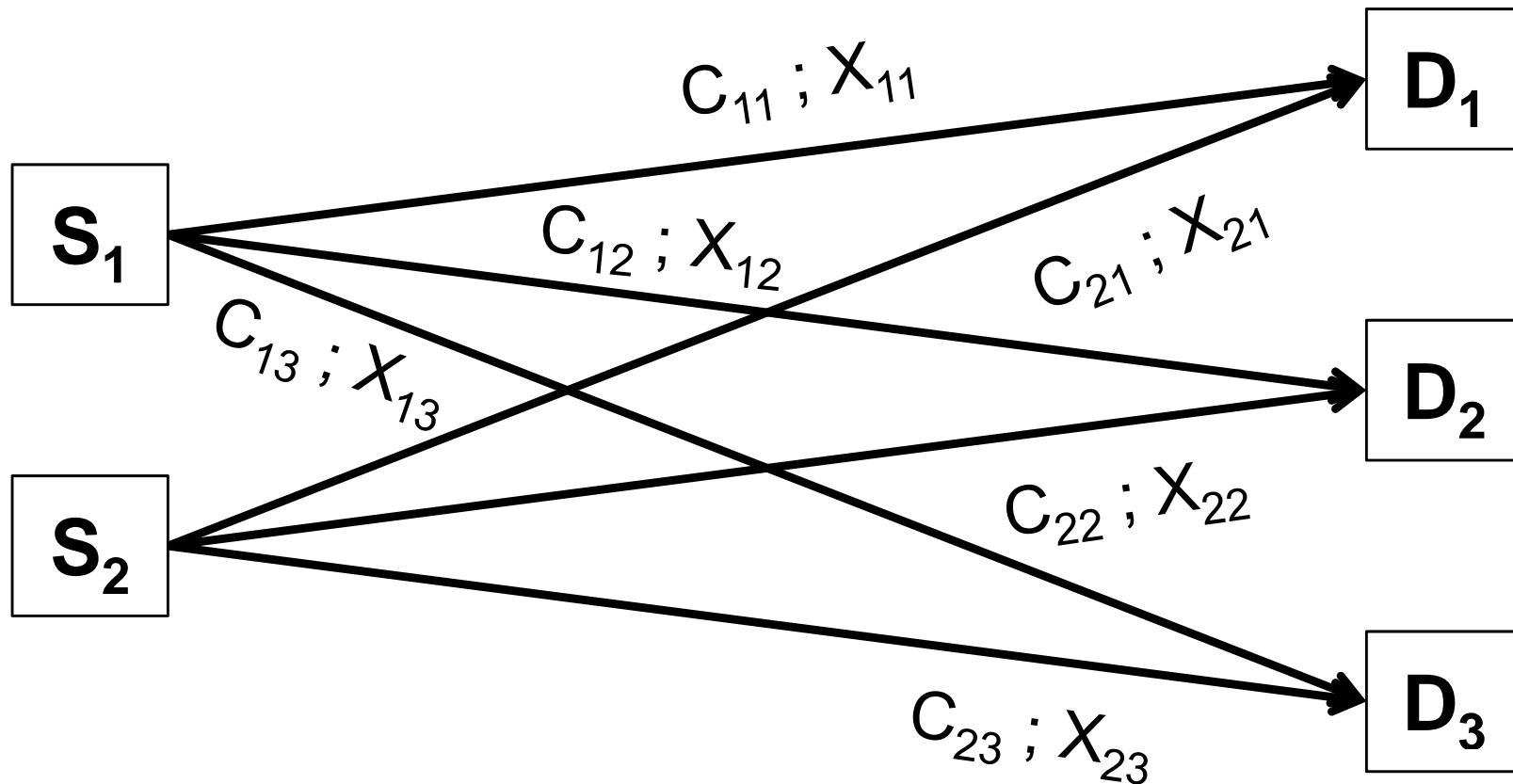
Fungsi Tujuan	Minimumkan : $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$		
Fungsi Pembatas	Balanced program	Unbalanced program	
	$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$	$\sum_{i=1}^m S_i < \sum_{j=1}^n D_j$	$\sum_{i=1}^m S_i > \sum_{j=1}^n D_j$
	$\sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i$	$\sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i$	$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq S_i$
	$\sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j$	$\sum_{i=1}^m X_{ij} \leq D_j$	$\sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j$
	$X_{ij} \geq 0 \text{ untuk semua } i \text{ dan } j$ $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$		



Jika ada 2 buah sumber & 3 tujuan (m = 2, n = 3), maka :

SUMBER

TUJUAN



$$\sum S = S_1 + S_2$$

$$\sum D = D_1 + D_2 + D_3$$

F. Tujuan :

Minimumkan

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

F. Pembatas :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = S_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = S_2$$

$$X_{11} + X_{21} = D_1$$

$$X_{12} + X_{22} = D_2$$

$$X_{13} + X_{23} = D_3$$

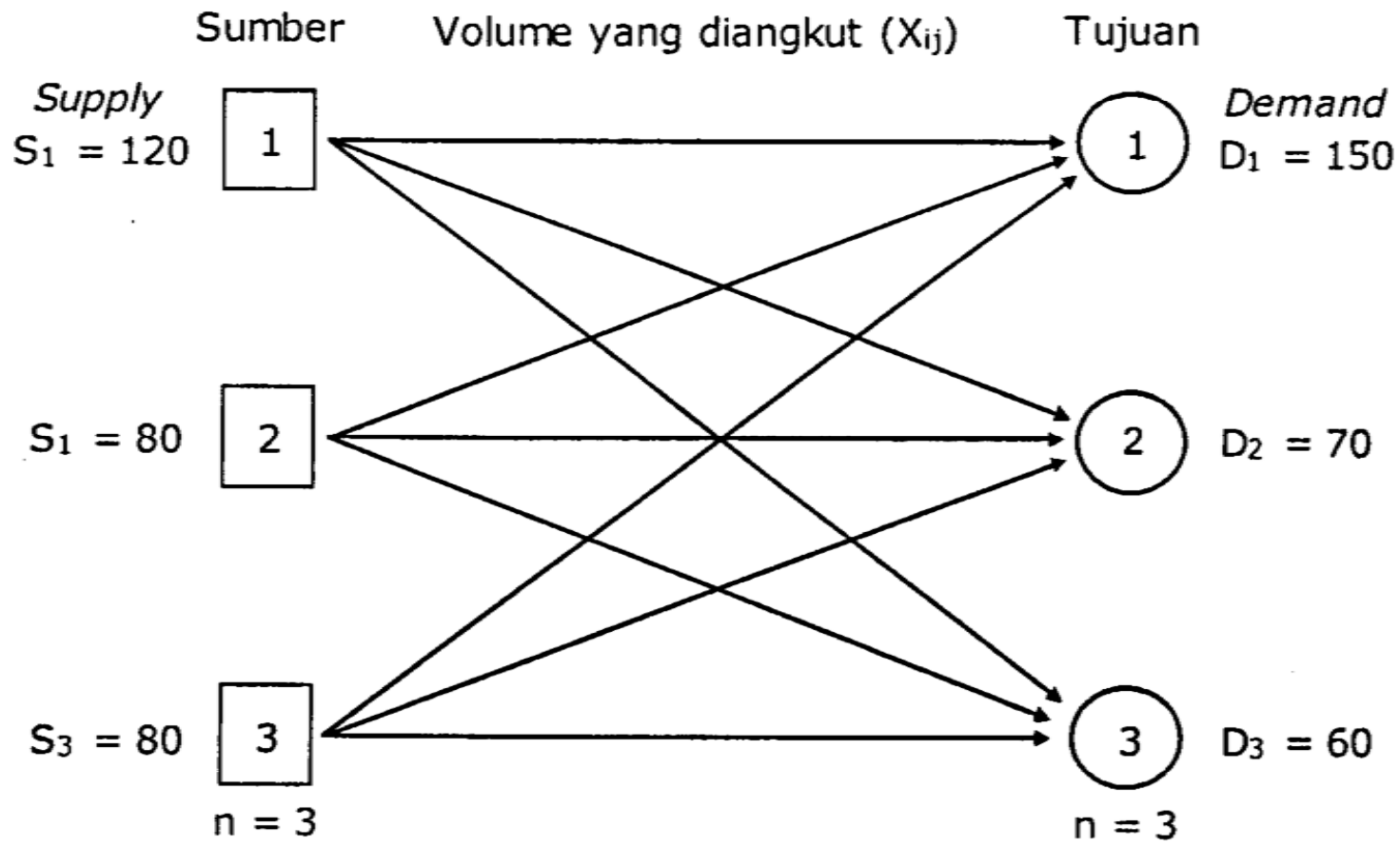
$$X_{ij} \geq 0$$

Ke		T u j u a n						Supply
		1	2	...	<i>j</i>	...	<i>n</i>	
S u m b e r	1	$X_{11}$ $C_{11}$	$C_{12}$	...	$C_{1j}$	...	$X_{1n}$ $C_{1n}$	$S_1$
	2	$X_{21}$ $C_{21}$	$X_{22}$ $C_{22}$	...	$X_{2j}$ $C_{2j}$	...	$X_{2n}$ $C_{2n}$	$S_2$
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	<i>i</i>	$C_{i1}$	$C_{i2}$	...	$C_{ij}$	...	$C_{in}$	$S_i$
	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>m</i>	$X_{m1}$ $C_{m1}$	$X_{m2}$ $C_{m2}$	...	$X_{mj}$ $C_{mj}$	...	$X_{mn}$ $C_{mn}$	$S_m$	
Demand	$D_1$	$D_2$	...	$D_j$	...	$D_n$	$\sum S_i = \sum D_j$	

## Contoh :

Sebuah perusahaan Negara berkepentingan mengangkut pupuk dari tiga pabrik ke tiga pasar. Kapasitas supply ketiga pabrik, permintaan pada ketiga pasar dan biaya transpor per unit adalah sebagai berikut :

		PASAR			PENAWARAN
		1	2	3	
PABRIK	1	8	5	6	120
	2	15	10	12	80
	3	3	9	10	80
PERMINTAAN		150	70	60	280



Minimumkan  $Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$

dengan syarat  $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120$  (*supply* pabrik 1)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 80$  (*supply* pabrik 2)

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 80$  (*supply* pabrik 3)

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150$  (permintaan pasar 1)

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 70$  (permintaan pasar 2)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 60$  (permintaan pasar 3)

semua  $X_{ij} \geq 0$

Dari \ Ke	1	2	3	<i>Supply</i>
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
<i>Demand</i>	150	70	60	280

# Langkah Pemecahan Masalah Transportasi :

1. Menentukan solusi fisibel awal dengan menggunakan ketiga metoda berikut :
  - a. *North West Corner Rule* (NWCR) / Pokia-Pokaba
  - b. *Least Cost Value* (LCV) / Ongkos Terkecil
  - c. *Vogel Approximation Method* (VAM)
2. Pilih salah satu hasil solusi fisibel awal yang mempunyai nilai solusi fisibel terkecil.
3. Menentukan apakah metoda yang terpilih pada langkah 1 sudah optimum atau belum, dengan cara menentukan *entering* variabel. Jika ada perubahan, maka lanjutkan ke langkah 3. Tapi jika tidak ada, maka STOP (berhenti).

4. Menentukan *leaving* variabel dari langkah 3 dan menghitung kembali nilai solusi fisibel yang baru, kemudian kembali ke langkah 3.

Untuk langkah 3 dan langkah 4, dapat menggunakan salah satu metode di bawah ini :

*a. Stepping Stone Method*

*b. Multiplier Method*



# Metode North West Corner Rule

- Menentukan distribusi dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah tanpa memperhatikan besarnya biaya.
- Prosedurnya :
  1. Mulai pada pojok kiri atas tabel dan alokasikan sebanyak mungkin pada  $X_{11}$  tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan (artinya  $X_{11}$  ditetapkan sama dengan yang terkecil diantara nilai  $S_1$  dan  $D_1$  atau  $\min(S_i, D_j)$ )

2. Ini akan menghabiskan penawaran pada sumber 1 dan atau permintaan pada tujuan 1. Akibatnya, tidak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian alokasikan sebanyak mungkin ke kotak di dekatnya pada baris atau pindahlah secara diagonal ke kotak berikutnya.
3. Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dan keperluan permintaan telah dipenuhi.

<b>Sbr</b> \ <b>Tuj</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	<b>120</b> 8	5	6	<b>120</b>
<b>2</b>	<b>30</b> 15	<b>50</b> 10	12	<b>80</b>
<b>3</b>	3	<b>20</b> 9	<b>60</b> 10	<b>80</b>
<b>Demand</b>	150	70	60	280

Caranya :

- Sebanyak mungkin dialokasikan ke  $X_{11}$  sesuai dengan aturan bahwa  $X_{11}$  adalah yang minimum diantara  $[120, 150]$ , berarti  $X_{11} = 120$ . Ini menghabiskan penawaran pabrik 1 dan akibatnya, pada langkah selanjutnya baris 1 dihilangkan.
- Karena  $X_{11} = 120$ , maka permintaan pada tujuan 1 belum terpenuhi sebanyak 30. Kotak di dekatnya,  $X_{21}$  dialokasikan sebanyak mungkin sesuai dengan  $X_{21} = \min [30, 80] = 30$ . Ini menghilangkan kolom 1 pada langkah selanjutnya.
- Kemudian  $X_{22} = \min [50, 70] = 50$ , yang menghilangkan baris 2.
- $X_{32} = \min [20, 80] = 20$
- $X_{33} = \min [60, 60] = 60$

Solusi fisibel awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis sbb :

Variabel Basis :

$$X_{11} = 120$$

$$X_{21} = 30$$

$$X_{22} = 50$$

$$X_{32} = 20$$

$$X_{33} = 60$$

Variabel Nonbasis :

$$X_{12} = 0$$

$$X_{13} = 0$$

$$X_{23} = 0$$

$$X_{31} = 0$$

Maka total biaya transpor adalah :

$$Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$$

$$= (8 \times 120) + (15 \times 30) + (10 \times 50) + (9 \times 20) + (10 \times 60)$$

$$= 2690$$

# Metode Least Cost Value

- Mencapai tujuan minimasi biaya dengan alokasi sistematis pada kotak-kotak sesuai dengan besarnya biaya transpor per unit.
- Prosedurnya :
  1. Pilih variabel  $X_{ij}$  (kotak) dengan biaya transpor ( $C_{ij}$ ) terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin. Untuk  $C_{ij}$  terkecil,  $X_{ij} = \text{minimum } [S_i, D_j]$ . Ini akan menghabiskan baris  $i$  atau kolom  $j$ .
  2. Dari kotak-kotak sisanya yang layak (yaitu yang tidak terisi atau tidak dihilangkan), pilih nilai  $C_{ij}$  terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin.
  3. Lanjutkan proses ini sampai semua penawaran dan permintaan terpenuhi.

<b>Sbr</b> \ <b>Tuj</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	8 70	5 50	6	120
<b>2</b>	15 70	10	12 10	80
<b>3</b>	3 80	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

Caranya :

- Langkah pertama dalam metode LCV adalah menyarankan alokasi  $X_{31}$  karena  $C_{31} = 3$  adalah kotak dengan biaya minimum. Jumlah yang dialokasikan adalah  $X_{31} = \min [150, 80] = 80$ . Karena alokasi ini menghabiskan penawaran sumber 3 sehingga baris 3 dihapus, dan  $X_{32}$  maupun  $X_{33}$  tak layak lagi. Juga, permintaan sebanyak 150 pada tujuan 1 dikurangi 80 sehingga sekarang permintaannya tinggal 70.
- Alokasi kotak selanjutnya dipilih dari 6 kotak sisanya,  $C_{ij}$  terkecil adalah  $C_{12} = 5$  dan  $X_{12} = \min [70, 120] = 70$ .



- Alokasi kotak sisanya dibuat dengan cara yang sama.
- Jika terdapat nilai  $C_{ij}$  terkecil yang sama (kembar), pilih diantara kotak itu secara sembarang. Karena ini hanya merupakan solusi awal yang tidak berpengaruh terhadap solusi optimum, kecuali mungkin memerlukan iterasi yang lebih banyak untuk mencapainya.

Solusi fisibel awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis sbb :

Variabel Basis :

$$X_{12} = 70$$

$$X_{13} = 50$$

$$X_{21} = 70$$

$$X_{23} = 10$$

$$X_{31} = 80$$

Variabel Nonbasis :

$$X_{11} = 0$$

$$X_{22} = 0$$

$$X_{32} = 0$$

$$X_{33} = 0$$

Maka total biaya transpor adalah :

$$\begin{aligned} Z &= 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + \\ &\quad 9X_{32} + 10X_{33} \\ &= (5 \times 70) + (6 \times 50) + (15 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80) \\ &= 2060 \end{aligned}$$

# Metode Aproksimasi Vogel

- VAM hampir selalu memberikan suatu solusi awal yang lebih baik dibanding metode NWCR dan seringkali lebih baik daripada metode LCV.
- Pada beberapa kasus, solusi awal yang diperoleh melalui VAM akan menjadi optimum.
- VAM melakukan alokasi dalam suatu cara yang akan meminimumkan *penalty (opportunity cost)* dalam memilih kotak yang salah untuk suatu alokasi.

# Prosedurnya

1. Hitung *opportunity cost* untuk setiap baris dan kolom. *Opportunity cost* untuk setiap baris  $i$  dihitung dengan mengurangi nilai  $C_{ij}$  terkecil pada baris itu dari nilai  $C_{ij}$  satu tingkat lebih besar pada baris yang sama. *Opportunity cost* kolom diperoleh dengan cara yang serupa. Biaya-biaya ini adalah *penalty* karena tidak memilih kotak dengan biaya minimum.
2. Pilih baris atau kolom dengan *opportunity cost* terbesar (jika terdapat nilai kembar, pilih secara sembarang). Alokasikan sebanyak mungkin ke kotak dengan nilai  $C_{ij}$  minimum pada baris atau kolom yang dipilih. Untuk  $C_{ij}$  terkecil.  $X_{ij} = \text{minimum } [S_i, D_j]$ . Artinya *penalty* terbesar dihindari.

3. Sesuaikan penawaran dan permintaan untuk menunjukkan alokasi yang sudah dilakukan. Hilangkan semua baris dan kolom dimana penawaran dan permintaan telah dihabiskan.
  
4. Jika semua penawaran dan permintaan belum dipenuhi, kembali ke langkah 1 dan hitung lagi *opportunity cost* yang baru. Jika semua penawaran dan permintaan, solusi awal telah diperoleh.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	<b>80</b>	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

Penalty Cost (Baris)

$$6 - 5 = 1$$

$$12 - 10 = 2$$

$$9 - 3 = 6$$



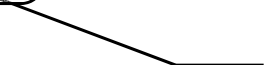
Penalty terbesar

Penalty Cost (Kolom)

$$8 - 3 = 5$$

$$9 - 5 = 4$$

$$10 - 6 = 4$$



Penalty Cost → Selisih Cost terkecil

Sbr \ Tuj				supply		
	1	2	3			
1	<b>70</b>	8	5	6	120	
2		15	<b>70</b>	10	12	80
3	<b>80</b>	3	9	10	80	
<b>Demand</b>	150	70	60	280		

Penalty Cost (Baris)

I	II	III
1	1	1
2	2	2
6	–	–

Penalty Cost (Kolom)	I	5	4	4
	II	7	5	6
	III	–	5	6

Caranya :

- Langkah pertama dalam metode VAM adalah menghitung *opportunity cost* (*penalty cost*) untuk iterasi ke-1 yang dilakukan pada setiap baris dan kolom. Setelah itu dipilih *opportunity cost* yang terbesar.
- Karena sumber 3 memiliki nilai *opportunity cost* terbesar maka disarankan alokasi  $X_{31}$  karena  $C_{31} = 3$  adalah kotak dengan biaya minimum jika dibandingkan dengan  $C_{32}$  dan  $C_{33}$ . Jumlah yang dialokasikan adalah  $X_{31} = \min [150, 80] = 80$ . Karena alokasi ini menghabiskan penawaran sumber 3 sehingga baris 3 dihapus, dan  $X_{32}$  maupun  $X_{33}$  tak diperhitungkan lagi pada iterasi berikutnya. Juga, permintaan sebanyak 150 pada tujuan 1 dikurangi 80 sehingga sekarang permintaannya tinggal 70.



- Pada iterasi ke-2, lakukan perhitungan *opportunity cost* dengan mengabaikan kotak yang telah terisi ( $X_{31}$ ) ataupun yang tidak akan diperhitungkan lagi ( $X_{32}$ ,  $X_{33}$ ). Karena pada iterasi ke-2, kolom tujuan 1 yang memiliki *opportunity cost* terbesar maka disarankan mengalokasikan ke kotak  $X_{11}$  karena  $C_{31} = 8$  dengan alokasi sebesar  $X_{31} = \min [70, 120] = 70$ .
- Lakukan iterasi tersebut berulang-ulang sampai permintaan terpenuhi semua.

Solusi fisible awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis sbb :

Variabel Basis :

$$X_{11} = 70$$

$$X_{13} = 50$$

$$X_{22} = 70$$

$$X_{23} = 10$$

$$X_{31} = 80$$

Variabel Nonbasis :

$$X_{12} = 0$$

$$X_{21} = 0$$

$$X_{32} = 0$$

$$X_{33} = 0$$

Maka total biaya transpor adalah :

$$Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$$

$$= (8 \times 70) + (6 \times 50) + (10 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80)$$

$$= 1920$$

- Dari pencarian solusi awal dengan ketiga metoda di atas, diperoleh kesimpulan bahwa biaya awal terkecil adalah 1920 yang diperoleh dari hasil pencarian dengan metoda VAM.
- Tetapi apakah solusi ini merupakan solusi optimum atau bukan, belum diketahui. Karena harus dilanjutkan ke langkah 2 untuk mencari solusi optimum.
- Setelah solusi layak dasar awal diperoleh, kemudian dilakukan perbaikan untuk mencapai solusi optimum.
- Pencarian solusi optimum dapat dilakukan dengan menggunakan metoda ***stepping stone*** atau metoda ***multiplier***.