|  |
| --- |
| **1** **PENDAHULUAN LUAS** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUANTUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :Mendeskripsikan konsep dasar luas daerah menggunakan poligon-poligon baik dalam maupun luar. |

**Materi :**

* 1. **Pendahuluan**

Luas daerah memiliki beberapa sifat yaitu:

1. Luas sebuah daerah rata adalah bilangan real tak negatif
2. Luas persegi panjang adalah hasil kali panjang dan lebar (keduanya diukur dalam satuan sama).
3. Daerah-daerah kongruen mempunyai luas sama.
4. Luas dari gabungan dua daerah yang hanya berimpit menurut satu ruas garis sama dengan jumlah luas kedua daerah tersebut
5. Jika satu daerah terkandung di dalam daerah yang kedua, maka luas daerah pertama kurang daripada atau sama dengan luas yang kedua.

Bagaimana cara menentukan luas bidang yang dibatas oleh kurva.

* 1. **Luas Menurut Poligon Dalam**

Misal fungsi f(x) terdefinisi pada selang tutup [a,b]. $D=\left\{a\leq x\leq b,0\leq y\leq f\left(x\right)\right\}$, maka luas daerah D.

Akan ditentukan luas daerah D dengan menggunakan poligon dalam, langkahnya:

1. Partisikan selang [a,b] menjadi n selang dengan titik pembagian

$$a=x\_{0}<x\_{1}<…<x\_{n}=b$$

1. Definisikan panjang partisi P, sebagai

$\left‖P\right‖=\begin{matrix}Maks\\1\leq i\leq n\end{matrix}\left|∆x\_{k}\right|$, $∆x\_{k}=x\_{k}-x\_{k-1}$

1. Pilih $c\_{k}\in \left[x\_{k-1},x\_{k}\right]$, k = 1, 2, …, n
2. Bentuk jumlah Riemann: $\sum\_{k=1}^{n}f\left(c\_{k}\right)∆x\_{k}$
3. Jika $\left‖P\right‖\rightarrow 0$ maka diperoleh limit jumlah Riemann $\begin{matrix}lim\\\left‖P\right‖\rightarrow 0\end{matrix}\sum\_{k=1}^{n}f\left(c\_{k}\right)∆x\_{k}$

Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan Riemann pada selang [a,b] dan ditulis sebagai

Contoh:

Tentukan luas daerah $R$ yang dibatasi oleh $y=f\left(x\right)=x+5$, sumbu-$x$, sumbu-$y$ dan garis tegak $x=2$.

Jawab:



Partisikan selang $\left[0,2\right]$ menjadi selang $n$ selang bagian, masing-masing dengan panjang $∆x=\frac{2}{n}$, memiliki titik-titik

$$0=x\_{0}<x\_{1}<x\_{2}<…<x\_{n-1}<x\_{n}=2$$

Dengan

$$x\_{0}=0$$

$$x\_{1}=∆x=\frac{2}{n}$$

$$x\_{2}=2.∆x=\frac{4}{n}$$

$$x\_{3}=3.∆x=\frac{6}{n}$$

$$\vdots $$

$$x\_{i}=i.∆x=\frac{2i}{n}$$

$$…$$

$$x\_{n-1}=\left(n-1\right)∆x=\frac{2\left(n-1\right)}{n}$$

$$x\_{n}=n∆x=\frac{2n}{n}=2$$

Pandang persegi panjang dengan alas $\left[x\_{i-1},x\_{i}\right]$ dan $f\left(x\_{i-1}\right)=x\_{i}+5$. Luasnya adalah $f\left(x\_{i-1}\right)∆x$

1

2

0

5

10

Pilih salah satu poligon misal polygon ke-i.

$$x\_{i-1}$$

$$x\_{i}$$

$$f\left(x\_{i-1}\right)$$

$$∆x$$

Luas polygon disamping adalah:

$$L\_{i}=f\left(x\_{i-1}\right)∆x$$

Karena $f\left(x\_{i}\right)=x\_{i}+5$ dan $∆x=\frac{2}{n}$ maka

$$L\_{i}=\left[x\_{i-1}+5\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

Jika semua polygon dihitung jumlahnya kemudian di jumlahkan maka

$$∆A≈f\left(x\_{0}\right)∆x+f\left(x\_{1}\right)∆x+f\left(x\_{2}\right)∆x+…+f\left(x\_{n-1}\right)∆x$$

$$=\left[\left(x\_{0}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\left[\left(x\_{1}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\left[\left(x\_{2}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]+…+\left[\left(x\_{n-1}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$=\left[\left(x\_{0}+5\right)+\left(x\_{1}+5\right)+\left(x\_{2}+5\right)+…+\left(x\_{n-1}+5\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

Karena $x\_{i}=\frac{2i}{n}$

$$=\left[\left(0+5\right)+\left(\frac{2}{n}+5\right)+\left(\frac{4}{n}+5\right)+\left(\frac{6}{n}+5\right)+…+\left(\frac{2\left(n-1\right)}{n}+5\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\left[\left(0+\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{6}{n}+…+\frac{2\left(n-1\right)}{n}\right)+\left(5+5+5+5+…+5\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\left(0+\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{6}{n}+…+\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)+\left(5+5+5+5+…+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\sum\_{i=1}^{n}\frac{2\left(i-1\right)}{n}\left(\frac{2}{n}\right)+\sum\_{i=1}^{n}5\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n}\sum\_{i=1}^{n-1}\frac{2i}{n}+\left(5n\right)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)\sum\_{i=1}^{n-1}i+10=\frac{4}{n^{2}}\left[\frac{\left(n-1\right)n}{2}\right]+10=2-\frac{2}{n}+10=12-\frac{2}{n}$$

Luas dibawah kurva dapat dihitung dengan membuat lebar polygon mendekati 0 atau $∆x\rightarrow 0$

$$\lim\_{∆x\to 0}\sum\_{i=1}^{n}f\left(x\_{i}\right)∆x=\lim\_{n\to \infty }\left(12-\frac{2}{n}\right)=12$$

Maka luas daerah tersebut adalah 12

* 1. **Luas Menurut Poligon Luar**

Misal fungsi f(x) terdefinisi pada selang tutup [a,b]. $D=\left\{a\leq x\leq b,0\leq y\leq f\left(x\right)\right\}$, maka luas daerah D.

Akan ditentukan luas daerah D dengan menggunakan poligon dalam, langkahnya:

1. Partisikan selang [a,b] menjadi n selang dengan titik pembagian

$$a=x\_{0}<x\_{1}<…<x\_{n}=b$$

1. Definisikan panjang partisi P, sebagai

$\left‖P\right‖=\begin{matrix}Maks\\1\leq i\leq n\end{matrix}\left|∆x\_{k}\right|$, $∆x\_{k}=x\_{k}-x\_{k-1}$

1. Pilih $c\_{k}\in \left[x\_{k-1},x\_{k}\right]$, k = 1, 2, …, n
2. Bentuk jumlah Riemann: $\sum\_{k=1}^{n}f\left(c\_{k}\right)∆x\_{k}$
3. Jika $\left‖P\right‖\rightarrow 0$ maka diperoleh limit jumlah Riemann $\begin{matrix}lim\\\left‖P\right‖\rightarrow 0\end{matrix}\sum\_{k=1}^{n}f\left(c\_{k}\right)∆x\_{k}$

Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan Riemann pada selang [a,b] dan ditulis sebagai

Contoh:

Tentukan luas daerah $R$ yang dibatasi oleh $y=f\left(x\right)=x+5$, sumbu-$x$, sumbu-$y$ dan garis tegak $x=2$.

Jawab:



Partisikan selang $\left[0,2\right]$ menjadi selang $n$ selang bagian, masing-masing dengan panjang $∆x=\frac{2}{n}$, memiliki titik-titik

$$0=x\_{0}<x\_{1}<x\_{2}<…<x\_{n-1}<x\_{n}=2$$

Dengan

$$x\_{0}=0$$

$$x\_{1}=∆x=\frac{2}{n}$$

$$x\_{2}=2.∆x=\frac{4}{n}$$

$$x\_{3}=3.∆x=\frac{6}{n}$$

$$\vdots $$

$$x\_{i}=i.∆x=\frac{2i}{n}$$

$$…$$

$$x\_{n-1}=\left(n-1\right)∆x=\frac{2\left(n-1\right)}{n}$$

$$x\_{n}=n∆x=\frac{2n}{n}=2$$

1

2

0

5

10

Pilih salah satu poligon misal polygon ke-i.

$$∆x$$

$$x\_{i}$$

$$x\_{i+1}$$

$$f\left(x\_{i}\right)$$

Luas polygon disamping adalah:

$$L\_{i}=f\left(x\_{i}\right)∆x$$

Karena $f\left(x\_{i}\right)=x\_{i}+5$ dan $∆x=\frac{2}{n}$ maka

$$L\_{i}=\left[x\_{i}+5\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

Jika semua polygon dihitung jumlahnya kemudian di jumlahkan maka

$$∆A≈f\left(x\_{1}\right)∆x+f\left(x\_{2}\right)∆x+f\left(x\_{3}\right)∆x+…+f\left(x\_{n}\right)∆x$$

$$=\left[\left(x\_{1}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\left[\left(x\_{2}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\left[\left(x\_{3}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]+…+\left[\left(x\_{n}+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$=\left[\left(x\_{1}+5\right)+\left(x\_{2}+5\right)+\left(x\_{3}+5\right)+…+\left(x\_{n}+5\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

Karena $x\_{i}=\frac{2i}{n}$

$$=\left[\left(\frac{2}{n}+5\right)+\left(\frac{4}{n}+5\right)+\left(\frac{6}{n}+5\right)+\left(\frac{8}{n}+5\right)+…+\left(\frac{2n}{n}+5\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\left[\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{6}{n}+\frac{8}{n}+…+\frac{2n}{n}\right)+\left(5+5+5+5+…+5\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{6}{n}+\frac{8}{n}+…+\frac{2n}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)+\left(5+5+5+5+…+5\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\sum\_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\left(\frac{2}{n}\right)+\sum\_{i=1}^{n}5\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)\sum\_{i=1}^{n-1}i+10=\frac{4}{n^{2}}\left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]+10=2+\frac{2}{n}+10=12+\frac{2}{n}$$

Luas dibawah kurva dapat dihitung dengan membuat lebar polygon mendekati 0 atau $∆x\rightarrow 0$

$$\lim\_{∆x\to 0}\sum\_{i=1}^{n}f\left(x\_{i}\right)∆x=\lim\_{n\to \infty }\left(12+\frac{2}{n}\right)=12$$

Maka luas daerah tersebut adalah 12

* 1. **Latihan**
1. Gambar grafik dari fungsi yang diberikan pada selang $\left[a,b\right]$, kemudian bagi selang $\left[a,b\right]$ menjadi $n$ selang bagian yang sama, dan akhirnya hitung luas poligon dalam yang berpadanan
2. $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}+1$; $a=0$ dan $b=2$
3. $f\left(x\right)=3x-1$; $a=1$ dan $b=3$
4. Gambar grafik dari fungsi yang diberikan pada selang $\left[a,b\right]$, kemudian bagi selang $\left[a,b\right]$ menjadi $n$ selang bagian yang sama, dan akhirnya hitung luas poligon luar yang berpadanan
5. $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}-1$; $a=2$ dan $b=4$
6. $f\left(x\right)=x+1$; $a=0$ dan $b=2$