

PROGRAMA LINIER

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-2

Riani Lubis

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

Arti Program Linier

- *Linier Programming* adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumberdaya yang terbatas, diantara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan.
- *Linier Programming* merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumberdaya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya.
- *Linier Programming* adalah salah satu model *Operations Research* yang menggunakan teknik optimisasi matematika linear di mana seluruh fungsi harus berupa fungsi matematika linear.

Formulasi Model Programa Linier

- Masalah keputusan yang sering dihadapi adalah alokasi optimum sumberdaya yang langka.
- Sumberdaya : uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan, teknologi, dll.
- Tujuan : mencapai hasil terbaik yang mungkin dicapai dengan keterbatasan sumberdaya yang ada
 - Maksimasi : profit, penjualan, kesejahteraan
 - Minimasi : biaya, waktu, jarak
- Karakteristik dalam programa linier :
 1. Variabel Keputusan
 2. Fungsi Tujuan
 3. Fungsi Kendala/Pembatas

Variabel Keputusan (1)

- Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat dan akan mempengaruhi nilai tujuan yang hendak dicapai.
- Penentuan variabel keputusan harus dilakukan terlebih dahulu sebelum merumuskan fungsi tujuan dan kendala-kendalanya.
- Caranya, ajukan pertanyaan :
“Keputusan apa yang harus dibuat agar nilai fungsi tujuan menjadi maksimum atau minimum”

Variabel Keputusan (2)

Contoh :

1. Berapa **banyak produk harus diproduksi dan persediaan harus tersedia** pada periode tertentu agar laba total minimum atau biaya total minimum ?
2. Berapa **banyak produk harus dikirim** dari gudang K ke gudang L agar biaya pengiriman total minimum ?
3. Saham mana yang harus dibeli dan **berapa banyak saham harus dibeli** agar tingkat kembalian total maksimum ?

Fungsi Tujuan (1)

- Fungsi Tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan **dimaksimumkan** (biasanya untuk pendapatan atau keuntungan) atau **diminimumkan** (biasanya untuk ongkos/biaya).
- Dalam program linier, tujuan yang hendak dicapai harus diwujudkan ke dalam sebuah fungsi matematika linier.

Fungsi Tujuan (2)

- Contoh :
 - Memaksimumkan laba perusahaan
 - Meminimumkan biaya persediaan
 - Meminimumkan biaya-biaya operasi
 - Meminimumkan waktu kerja
 - Memaksimumkan daya jangkau media promosi
- Model matematis :
 - Maksimasi : $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$
 - Minimasi : $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Fungsi Kendala/Pembatas (1)

- Pembatas merupakan kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga-harga variabel keputusan secara sembarang.
- Contoh :
 1. Keputusan meningkatkan volume produksi dibatasi oleh faktor-faktor seperti kemampuan mesin, jumlah sumber daya manusia, dan teknologi yang tersedia.
 2. Manajer produksi harus menjaga tingkat produksi agar permintaan pasar terpenuhi
 3. Agar kualitas produk yang dihasilkan memenuhi standar tertentu maka unsur bahan baku yang digunakan harus memenuhi kualifikasi minimum.

Fungsi Kendala/Pembatas (2)

Ada tiga macam kendala :

1. **Kendala berupa pembatas**

- Mengendalikan ruas kiri agar tidak lebih besar dari ruas kanannya
- Tanda yang digunakan : \leq

2. **Kendala berupa syarat**

- Mengendalikan ruas kiri agar tidak lebih kecil daripada nilai ruas kanannya
- Tanda yang digunakan : \geq

3. **Kendala berupa keharusan**

- Mengendalikan nilai ruas kiri agar nilainya sama dengan nilai ruas kanannya.
- Tanda yang digunakan : $=$

Asumsi Model Program Linier

1. **Asumsi kesebandingan (*proporsionality*)**

Penambahan ongkos atau keuntungan bertambah sesuai dengan pertambahan variabel keputusan

2. **Asumsi penambahan (*addivity*)**

Setiap penambahan variabel keputusan akan berpengaruh kepada fungsi tujuan, begitu juga setiap penambahan fungsi pembatas akan berpengaruh kepada fungsi tujuan

3. **Asumsi pembagian (*divisibility*)**

Nilai yang diberikan oleh variabel keputusan bisa berupa pecahan

4. **Asumsi kepastian (*certainty*)**

Parameter-parameter model yang terdapat pada sistem tersebut sudah diketahui

Contoh 1

PT. Sayang anak memproduksi dua jenis mainan yang terbuat dari kayu (boneka kayu & kereta api kayu). Untuk membuat kedua mainan tersebut, diperlukan dua kelompok tenaga kerja (tukang kayu & tukang poles).

| | Boneka Kayu | Kereta Api Kayu |
|--------------------|---|---|
| Harga jual | Rp. 27.000 per lusin | Rp. 21.000 per lusin |
| Biaya material | Rp. 10.000 per lusin | Rp. 9.000 per lusin |
| Biaya tenaga kerja | Rp. 14.000 per lusin | Rp. 10.000 per lusin |
| Waktu proses | <ul style="list-style-type: none">• 2 jam pemolesan• 1 jam pengerjaan kayu | <ul style="list-style-type: none">• 1 jam pemolesan• 1 jam pengerjaan kayu |

- Jam kerja yang tersedia :
 - 100 jam untuk pemolesan
 - 80 jam untuk pekerjaan kayu
- Hasil pengamatan pasar :
 - Kebutuhan akan Kereta Api tidak terbatas
 - Kebutuhan Boneka, tidak lebih dari 40 lusin yang terjual setiap minggu

Bagaimanakah formulasi dari persoalan di atas untuk mengetahui seberapa lusin jenis mainan masing-masing yang harus dibuat setiap minggu agar diperoleh keuntungan yang maksimum ?

- **Variabel keputusan :**

- X_1 = banyaknya boneka yang dibuat setiap minggu
- X_2 = banyaknya kereta api yang dibuat setiap minggu

- **Fungsi tujuan :**

Memaksimumkan (pendapatan/minggu) – (ongkos material/minggu) – ongkos tenaga kerja/minggu)

- Pendapatan/minggu = $27 X_1 + 21 X_2$
- Ongkos material/minggu = $10 X_1 + 9 X_2$
- Ongkos tenaga kerja/minggu = $14 X_1 + 10 X_2$

- Jadi :

$$(27 X_1 + 21 X_2) - (10 X_1 + 9 X_2) - (14 X_1 + 10 X_2) = 3 X_1 + 2 X_2$$

- Maksimumkan :

$$z = 3 X_1 + 2 X_2$$

- **Pembatas :**

1. Setiap minggu tidak lebih dari 100 jam waktu pemolesan yang dapat digunakan $\rightarrow 2 X_1 + X_2 \leq 100$
2. Setiap minggu tidak lebih dari 80 jam waktu pengerjaan kayu yang dapat digunakan $\rightarrow X_1 + X_2 \leq 80$
3. Karena permintaan yang terbatas, maka tidak lebih dari 40 lusin boneka yang dapat dibuat setiap minggu. Jumlah material yang dapat digunakan diasumsikan tidak terbatas sehingga tidak ada pembatas untuk hal ini $\rightarrow X_1 \leq 40$

- **Pembatas tanda :**

- Kedua variabel keputusan harus berharga positif :

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

- Formulasi :

$$\text{Maksimasi : } z = 3 X_1 + 2 X_2$$

Pembatas :

$$2 X_1 + X_2 \leq 100$$

$$X_1 + X_2 \leq 80$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Contoh 2

Perusahaan kaca WYNDOR memproduksi kaca dengan kualitas tinggi, termasuk jendela dan pintu.

Perusahaan tersebut mempunyai 3 departemen :

- Departemen 1 : membuat rangka aluminium dan perkakas logam
- Departemen 2 : membuat rangka kayu
- Departemen 3 : membuat kaca dan merakit sebuah produk

Karena terjadi penurunan pendapatan, maka pihak atasan memutuskan untuk menghentikan produk yang tidak mendatangkan keuntungan & menentukan kapasitas produksi untuk membuat dua produk baru yang dinilai mempunyai potensi pasar tinggi.

Produk tersebut adalah :

- Produk 1 : pintu kaca dengan rangka aluminium
- Produk 2 : rangka rangkap jendela dari kayu

Produk 1 membutuhkan proses di Departemen 1 dan 3. Produk 2 membutuhkan proses di Departemen 2 dan 3. Bagian Pemasaran berpendapat bahwa perusahaan dapat menjual setiap produk sebanyak jumlah produk yang dapat diproduksi oleh departemen-departemen tersebut.

Maka perlu menentukan **rata-rata produksi kedua produk** tersebut supaya **keuntungan yang diperoleh dapat maksimal**, tetapi disesuaikan dengan kapasitas produksi yang tersedia di tiga departemen yang ada. Diasumsikan bahwa tiap produk akan diproduksi dengan satuan batch (20 unit), sehingga rata-rata produksi diartikan sebagai jumlah batch yang dihasilkan tiap minggunya.

Identifikasi yang harus dikumpulkan :

1. Jumlah jam produksi yang tersedia tiap minggu di setiap departemen
2. Jumlah waktu produksi yang digunakan untuk memproduksi setiap batch produk baru di setiap departemen
3. Keuntungan tiap batch produk baru.

Jika diasumsikan :

X_1 = jumlah batch produk 1 tiap minggu

X_2 = jumlah batch produk 2 tiap minggu

Z = total keuntungan tiap minggu (dalam satuan ribuan dolar) hasil produksi kedua produk.

Data permasalahan Wyndoor Glass Co.

| Departemen | Waktu Produksi per Batch, Jam | | Waktu Produksi Tersedia per Minggu, Jam |
|-------------------------|----------------------------------|---------|---|
| | Produk | | |
| | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 12 |
| 3 | 3 | 2 | 18 |
| Keuntungan per Batch | \$ 3000 | \$ 5000 | |

Maka diperoleh :

- Variabel keputusan :

X_1 = jumlah produk 1 yang harus diproduksi

X_2 = jumlah produk 2 yang harus diproduksi

- Tujuannya/Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } z = 3 X_1 + 5 X_2$$

- Pembatas/Batasan :

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Formulasi Umum Program Linier :

| aktivitas sumber | Penggunaan sumber/unit | | | | Banyaknya sumber yang dapat digunakan |
|--------------------------------|------------------------|----------------|-----|----------------|---------------------------------------|
| | 1 | 2 | ... | n | |
| 1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1n} | b_1 |
| 2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2n} | b_2 |
| . | | | . | | . |
| . | | | . | | . |
| . | | | . | | . |
| m | a_{m1} | a_{m2} | ... | a_{mn} | b_m |
| $\Delta z/\text{Unit Tingkat}$ | c_1 x_1 | c_2 x_2 | ... | c_n x_n | |

F. Tujuan : Maksimasi $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

.....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

dan $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$