

TEORI ANTRIAN

MATA KULIAH RISET OPERASIONAL
Pertemuan Ke-13

Riani Lubis
Program Studi Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan (1)

- Pertamakali dipublikasikan pada tahun 1909 oleh Agner Kraup Erlang yang mengamati masalah kepadatan penggunaan telepon di Copenhagen Telephone.
- Ciri dari antrian : Kelambatan pelayanan pada saat-saat tertentu karena tingkat permintaan pelayanan yang melampaui dalam sebuah sistem.
- Antrian ialah suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan layanan dari satu atau lebih pelayan (fasilitas layanan).
- Antrian tidak perlu hadir secara fisik di depan struktur fisik fasilitas pelayanan. Anggota antrian dapat tersebar di beberapa tempat, sambil menunggu pelayan datang di tempat mereka masing-masing.

Pendahuluan (2)

- Antrian timbul disebabkan karena kebutuhan akan layanan melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan atau fasilitas layanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan.
- Tambahan fasilitas pelayanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau untuk mencegah timbulnya antrian. Akan tetapi biaya karena memberikan pelayanan tambahan, akan menimbulkan pengurangan keuntungan.
- Sebaliknya sering timbul antrian yang panjang akan mengakibatkan hilangnya pelanggan/nasabah.

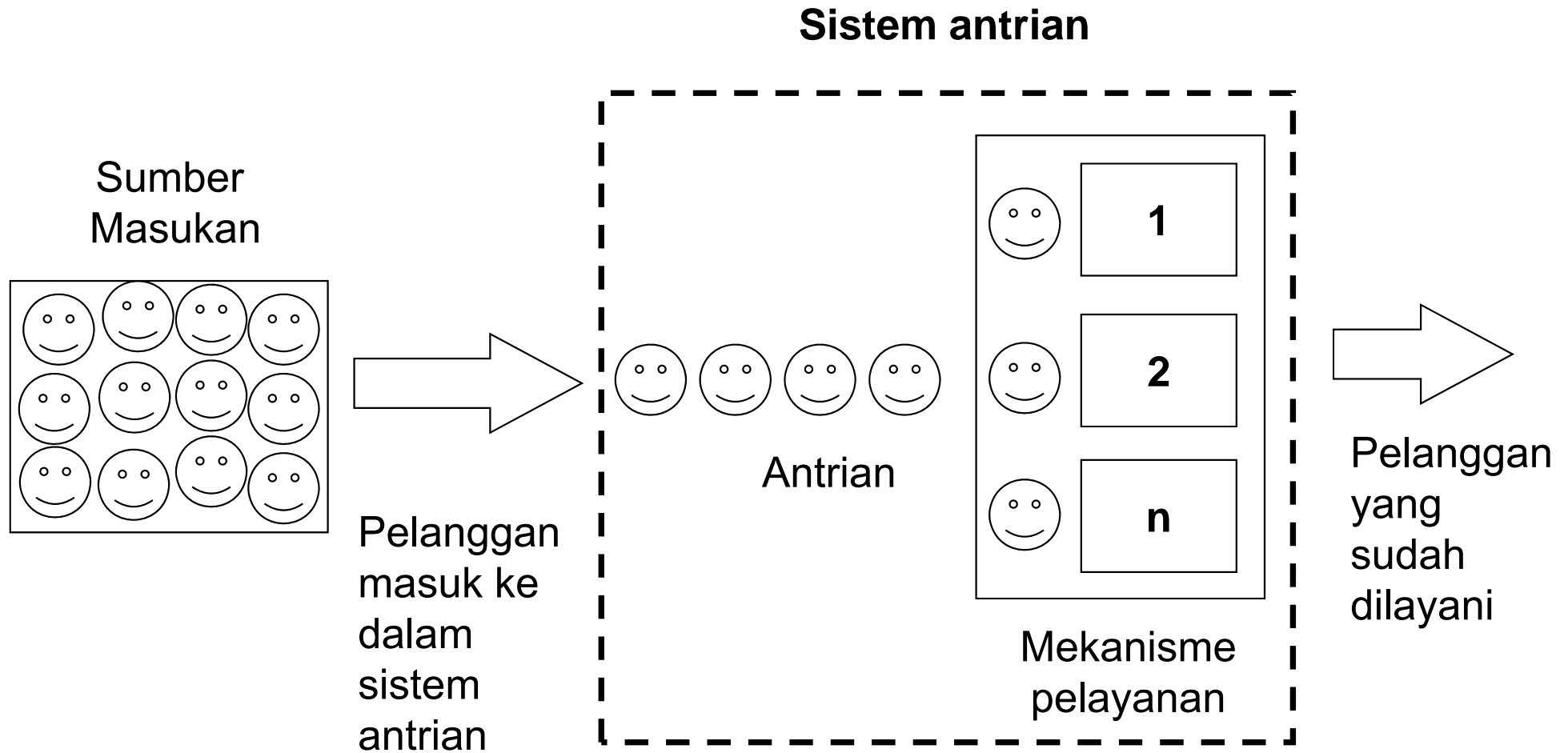
Pendahuluan (3)

- Klasifikasi antrian menurut Hillier & Lieberman :
 1. Sistem pelayanan komersial ; merupakan aplikasi yang sangat luas dari model-model antrian, seperti restoran, kafetaria, toko-toko, salon, butik, supermarket, dll.
 2. Sistem pelayanan bisnis-industri; mencakup lini produksi, sistem material-handling, sistem pergudangan, dan sistem-sistem informasi komputer.
 3. Sistem pelayanan transportasi
 4. Sistem pelayanan sosial; merupakan sistem-sistem pelayanan yang dikelola oleh kantor-kantor & jawatan-jawatan lokal maupun nasional, seperti kantor registrasi SIM & STNK, kantor pos, rumah sakit, puskesmas, dll.

Contoh Sistem Antrian

Sistem	Antrian/Garis Tunggu	Fasilitas Pelayanan
Lapangan terbang	Pesawat menunggu di landasan	Landasan pacu
Bank	Nasabah (orang)	Kasis/teller
Pencucian mobil	Mobil	Tempat pencucian mobil
Bongkar muat barang	Kapal dan truk	Fasilitas bongkar muat
Sistem komputer	Program komputer	CPU, printer, dll
Bantuan pengobatan darurat	Orang	Ambulance
Perpustakaan	Member	Pegawai perpustakaan
Registrasi mahasiswa	Mahasiswa	Pusat registrasi
Skedul sidang pengadilan	Kasus yang disidangkan	Pengadilan

Struktur Sistem Antrian



Komponen Dasar Proses Antrian (1)

1. Sumber Masukan

- Disebut juga sebagai Populasi Sumber (Calling Population) atau “kedatangan” atau sering dinamakan proses input.
- Setiap masalah antrian melibatkan kedatangan (misal : orang, mobil, panggilan telepon untuk dilayani, dll).
- Karakteristiknya : ukuran, yaitu jumlah pelanggan yang mungkin membutuhkan pelayanan dari waktu ke waktu (jumlah pelanggan potensial).
- Umumnya merupakan variabel acak dan pola statistik untuk pembangkitnya adalah distribusi Poisson.
- Asumsi yang setara adalah “waktu antara dua kedatangan yang berurutan”, adalah terdistribusi Eksponensial.

Komponen Dasar Proses Antrian (2)

2. Antrian

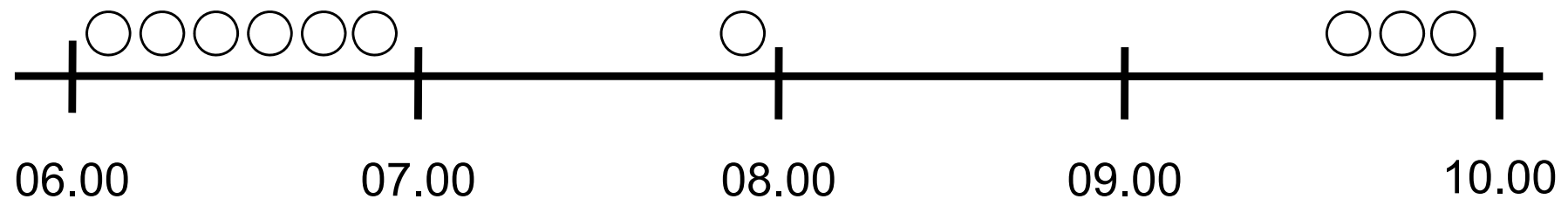
- Antrian merupakan tempat pelanggan “menunggu” sebelum dilayani.
- Karakteristik : jumlah maksimum pelanggan yang diizinkan berada di dalamnya.
- Timbulnya antrian terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Jika tidak ada antrian berarti terdapat pelayan yang menganggur atau kelebihan fasilitas pelayanan.

3. Pelayanan

- Pelayanan disebut juga sebagai mekanisme pelayanan
- Dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan (satu atau lebih fasilitas pelayanan).
- Tiap-tiap fasilitas pelayanan, kadang-kadang disebut sebagai saluran (channel)

Tingkat Kedatangan (1)

- Tingkat kedatangan merupakan distribusi kedatangan pelanggan dan interval waktu tetap dalam suatu kurun waktu.



- Misal pola permintaan pelanggan telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus (continuous of time) dapat dibagi ke dalam beberapa interval waktu yang sama (fixed interval)

Tingkat Kedatangan (2)

- Permintaan pelanggan terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus → proses poisson
- Misal ada 10 pelanggan yang datang dalam kurun waktu 06.00 – 10.00 dan jumlah pelanggan yang datang pada setiap interval berbeda.
- Asumsi :
 - Kedatangan pelanggan bersifat acak
 - Kedatangan pelanggan antar interval waktu saling tidak mempengaruhi

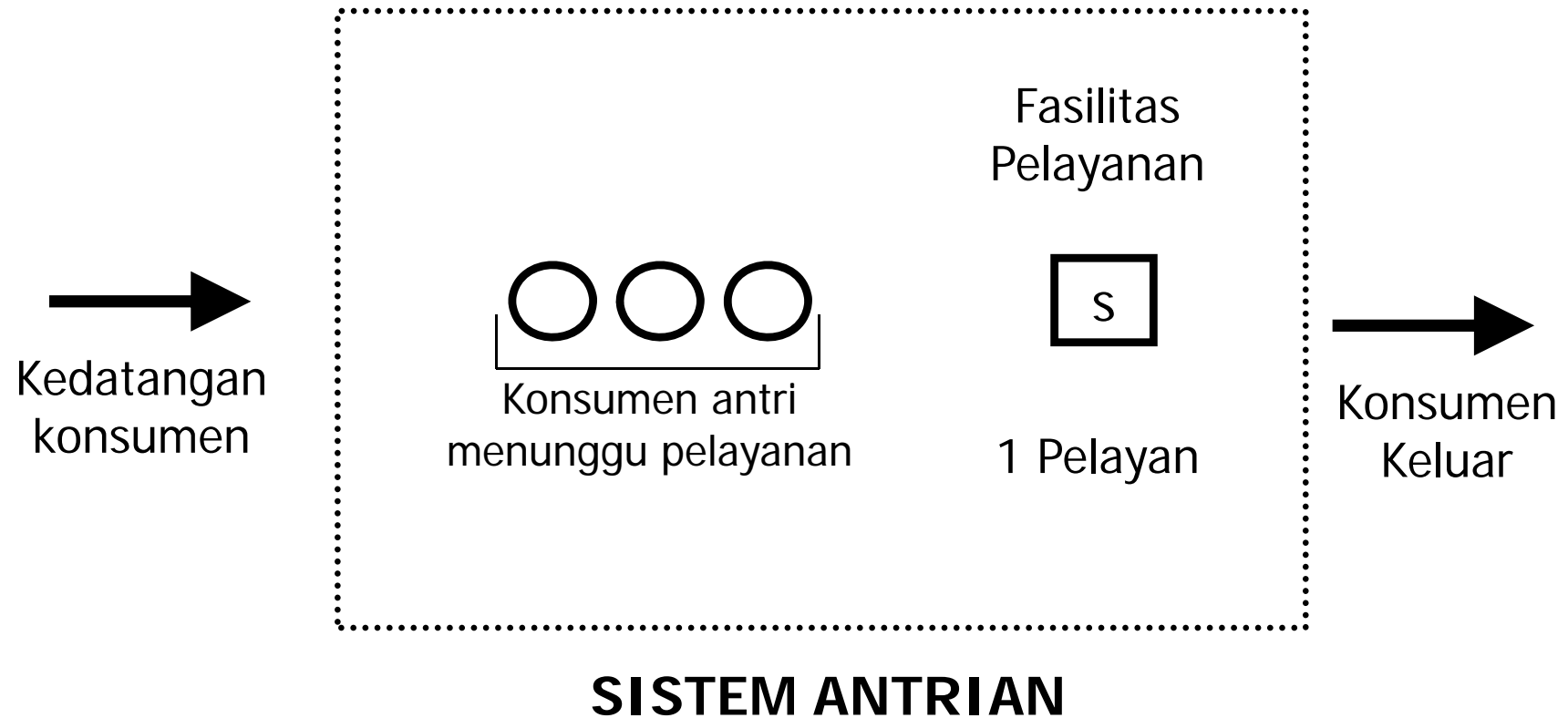
Disiplin Antrian

- Disiplin antri adalah aturan keputusan yang menjelaskan cara melayani pengantri.
- Ada 5 bentuk disiplin antrian yang biasa digunakan :
 1. **First-Come First-Served (FCFS)** atau **First-In First-Out (FIFO)** ; artinya lebih dulu datang (sampai), lebih dulu dilayani (keluar).
 2. **Last-Come First-Served (LCFS)** atau **Last-In First-Out (LIFO)**; artinya yang tiba terakhir yang lebih dulu keluar.
 3. **Service In Random Order (SIRO)**; artinya panggilan layanan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal siapa yang lebih dulu tiba.
 4. **Priority Service (PS)** ; artinya prioritas pelayanan diberikan kepada pelanggan yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dulu tiba dalam garis tunggu.

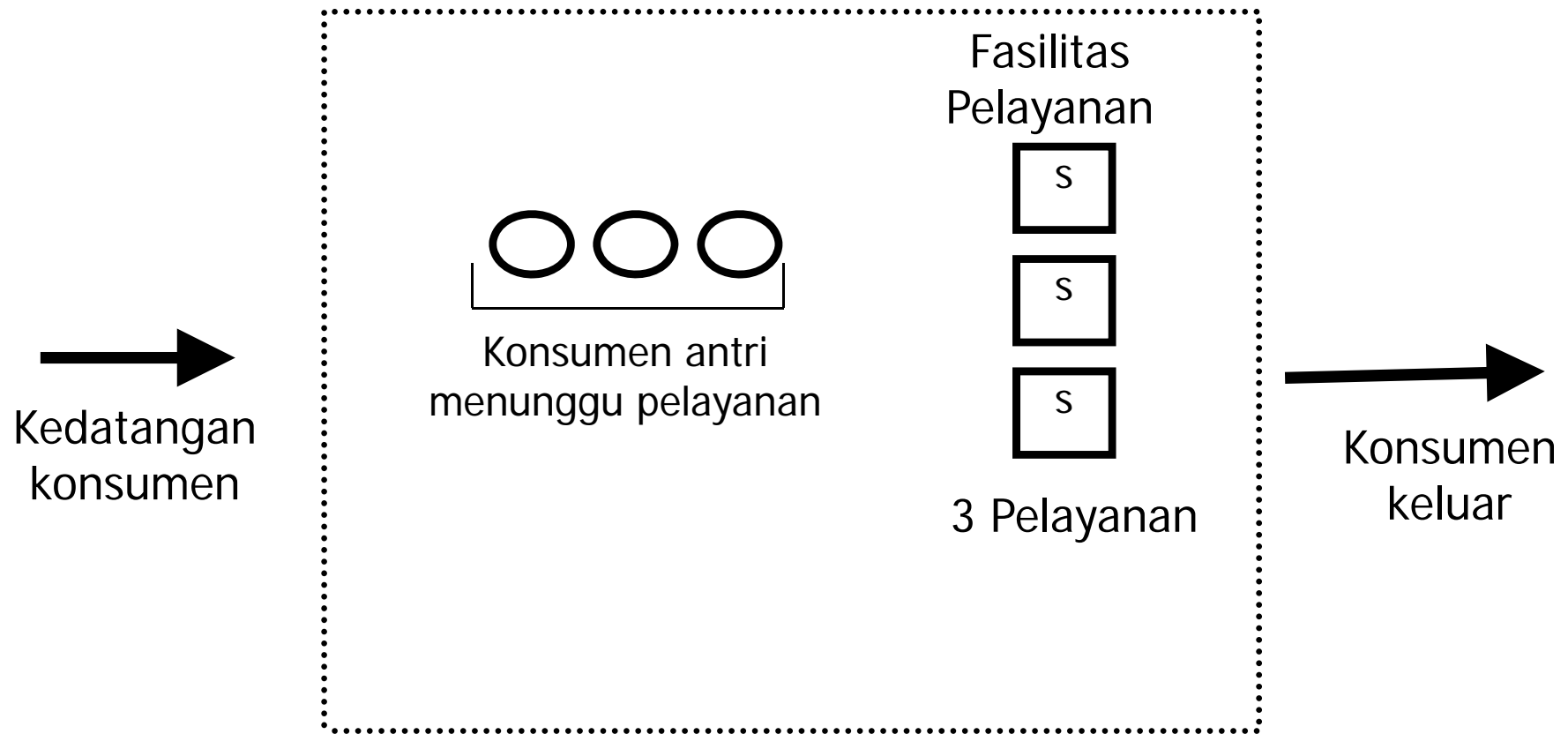
Mekanisme Pelayanan

1. Single Channel Single Phase/Single Server Single Phase
2. Multi Channel Single Phase/ Multi Server Single Phase
3. Single Channel Multi Phase/Single Server Multi Phase
4. Multi Channel Single Phase/Multi Server Single Phase

Single Server Single Phase

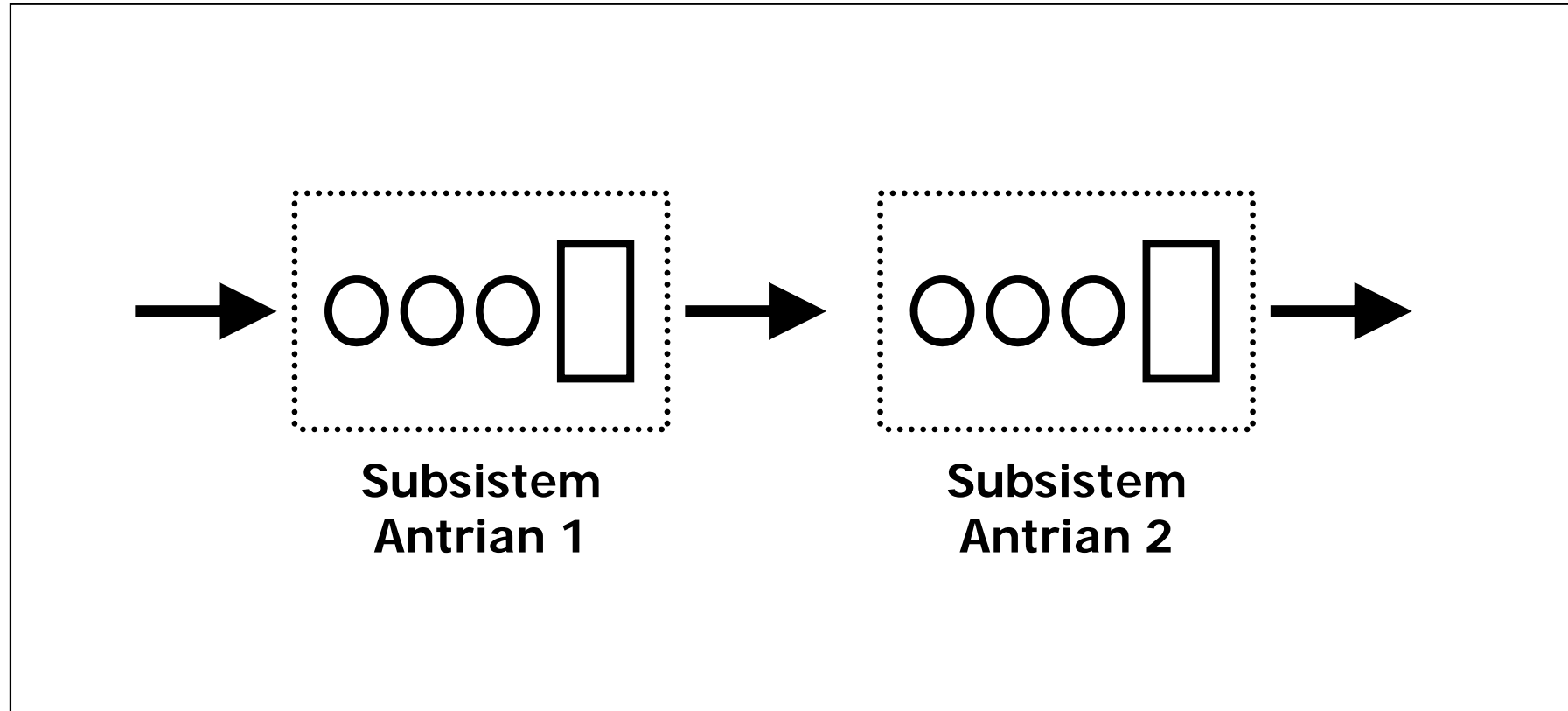


Multi Server Single Phase



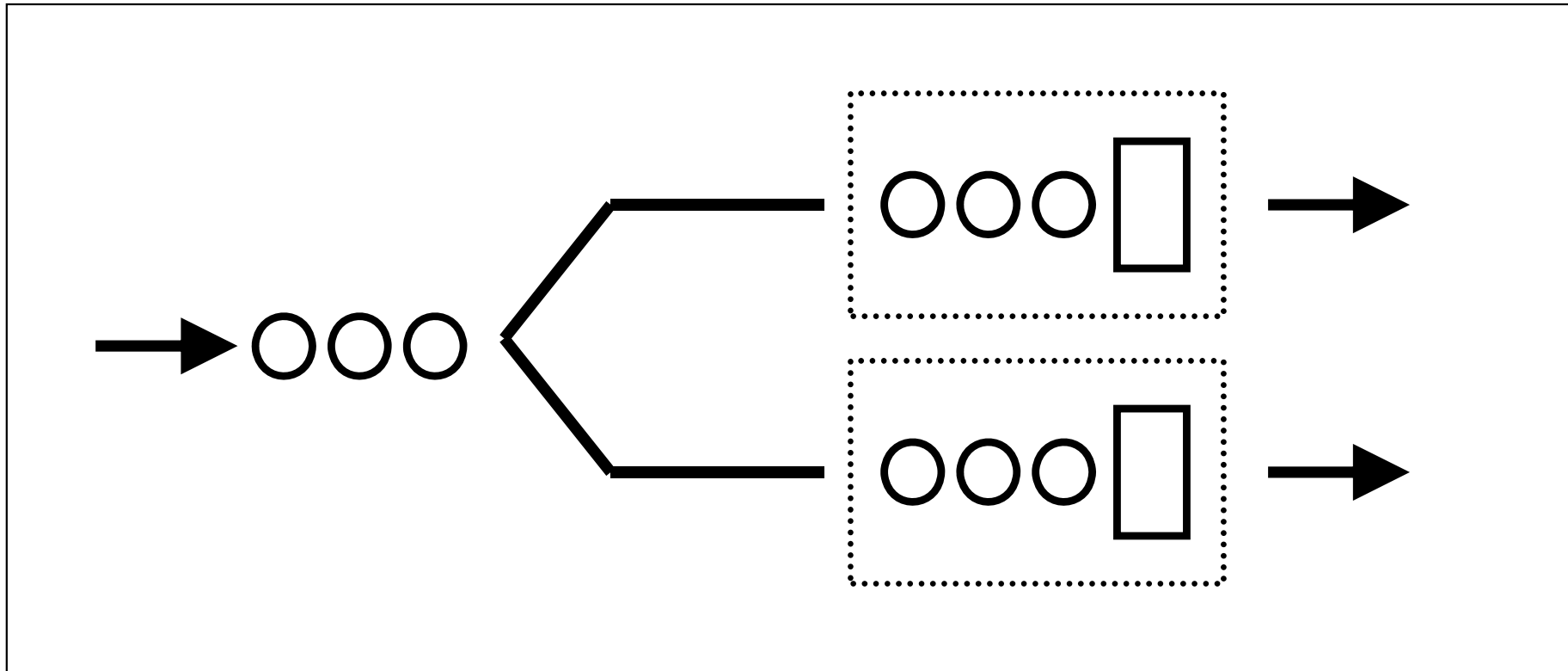
SISTEM ANTRIAN

Single Server Multi Phase



SISTEM ANTRIAN

Multi Server Single Phase



SISTEM ANTRIAN

Notasi dan Terminologi (1)

- n = jumlah pelanggan dalam sistem
- P_n = probabilitas kepastian n pelanggan dalam sistem
- λ = jumlah rata-rata pelanggan yang datang persatuan waktu
- μ = jumlah rata-rata pelanggan yang dilayani per satuan waktu
- P_0 = probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem
- P = tingkat intensitas fasilitas pelayanan
- L_s = jumlah rata-rata pelanggan dlm sistem
- L_q = jumlah pelanggan yang menunggu dalam antrian

Notasi dan Terminologi (2)

W_s = waktu rata-rata dalam sistem

W_q = waktu rata-rata selama menunggu dalam antrian

$1/\mu$ = waktu rata-rata pelayanan

$1/\lambda$ = waktu rata-rata antar kedatangan

S = jumlah fasilitas pelayanan

Notasi Umum Model Antrian

$(A / B / C);(D / E / F)$

Dimana :

A = distribusi waktu antar kedatangan (arrival distribution)

B = distribusi waktu pelayanan

C = jumlah saluran pelayanan/fasilitas pelayanan dalam sistem ($s = 1, 2, 3, \dots, \infty$)

D = disiplin antrian

E = ukuran populasi atau sumber

F = jumlah konsumen maksimum yang diperkenankan dalam sistem (dalam pelayanan ditambah garis tunggu)

Keterangan :

1. Untuk A dan B, dapat digunakan kode-kode berikut :

M = Distribusi Poisson atau distribusi eksponensial (Markovian)

D = Distribusi Degenerasi (waktu konstan)

E_k = Distribusi Erlang

G = Distribusi umum

2. Untuk C, dipergunakan bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah pelayanan.

3. Untuk D, gunakan kode-kode pengganti FIFO, LIFO, atau SIRO.

4. Untuk E dan F, digunakan kode :

N = Jumlah terbatas

∞ = Tak berhingga

Contoh :

model (M/M/1);(FIFO/ ∞ / ∞)

artinya :

Model menyatakan waktu antar kedatangan didistribusikan secara poisson, waktu pelayanan didistribusikan secara eksponensial, jumlah pelayan adalah satu, disiplin antrian adalah First-In First-Out, tidak berhingga jumlah langganan yang boleh masuk dalam sistem antrian, dan ukuran populasi masukkan adalah tak berhingga.

model (M/G/1)

artinya :

Model menyatakan waktu antar kedatangan didistribusikan secara eksponensial, waktu pelayanan tidak ada batasan, dan jumlah pelayan adalah 1.

Model (M / M / 1)

Karakteristik :

1. Tingkat Intensitas Fasilitas Pelayanan

Disebut juga tingkat kegunaan fasilitas (P), adalah hasil bagi antara laju kedatangan dan laju pelayanan. Makin besar harga P maka makin panjang antrian dan sebaliknya.

$$P = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Probabilitas Kepastian n Pelanggan dalam Sistem

Jika P adalah peluang bahwa sistem antrian sibuk, maka $1-P$ adalah sebaliknya (artinya peluang bahwa sistem antrian tidak mempunyai pelanggan)

$$P_0 = 1 - P \quad , n = 0$$

$$P_n = P^n P_0 \quad , n \neq 0$$

maka :

$$P_n = P^n (1 - P) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

3. Jumlah Rata-Rata Pelanggan dalam Sistem

Misal L_s merupakan jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem yang mencakup pelanggan yang menunggu dan yang sedang dilayani.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{P}{1 - P}$$

4. Jumlah Rata-Rata Pelanggan dalam Antrian

Misal L_q merupakan jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{P^2}{1 - P}$$

5. Waktu Rata-Rata dalam Sistem

Misal W_s merupakan waktu rata-rata bahwa seorang pelanggan akan menghabiskan waktunya dalam sistem.

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

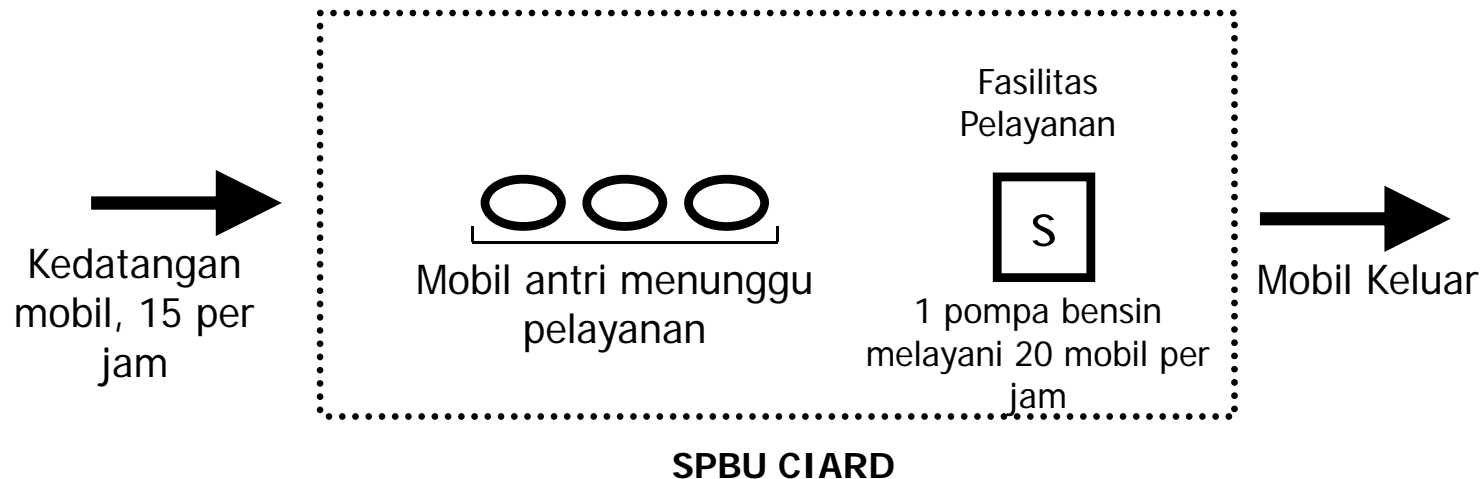
6. Waktu Rata-Rata dalam Antrian

Misal W_q merupakan waktu rata-rata yang diperlukan seorang pelanggan untuk menerima pelayanan.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Contoh

PT CIARD mengoperasikan satu buah pompa bensin dengan satu operator. Rata-rata tingkat kedatangan kendaraan mengikuti distribusi poisson yaitu 20 kendaraan per jam. Operator dapat melayani rata-rata 25 kendaraan per jam, dengan waktu pelayanan setiap kendaraan mengikuti distribusi probabilitas eksponensial.



Jika diasumsikan model sistem antrian yang digunakan operator tersebut (M/M/1), hitunglah :

1. Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan (ρ)
2. Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem
3. Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrian
4. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem (menunggu pelayanan)
5. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrian

Penyelesaian

$$\lambda = 20 \text{ dan } \mu = 25$$

1. Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan atau P

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0,80$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa operator akan sibuk melayani kendaraan selama 80% dari waktunya. Sedangkan 20% dari waktunya ($1 - P$) yang sering disebut idle time akan digunakan operator untuk istirahat, dll .

$$2 \quad L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{25 - 20} = 4, \text{ atau}$$

$$L_s = \frac{p}{1 - p} = \frac{0,80}{1 - 0,80} = 4$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa operator dapat mengharapkan 4 mobil yang berada dalam sistem

$$3 \quad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(20)^2}{25(25 - 20)} = \frac{400}{125} = 3,20$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa mobil yang menunggu untuk dilayani dalam antrian sebanyak 3,20 kendaraan

$$4 \quad W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{25 - 20} = \frac{1}{25} = 0,20 \text{ jam atau } 12 \text{ menit}$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam sistem selama 12 menit

$$5 \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{25(25 - 20)} = \frac{20}{125} = 0,16 \text{ jam atau } 9,6 \text{ menit}$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam antrian selama 9,6 menit

Model (M / M / s)

- Merupakan model antrian fasilitas pelayanan (server) ganda.
- Diasumsikan rata-rata tingkat kedatangan lebih kecil daripada tingkat pelayanan keseluruhan (agregat) atau penjumlahan segenap rata-rata tingkat pelayanan di tiap jalur.
- Syarat & kondisi lain sama dengan Model Server Tunggal

Karakteristik :

1. Tingkat Intensitas Fasilitas Pelayanan

$$P = \frac{\lambda}{s\mu}$$

2. Probabilitas Kepastian n Pelanggan dalam Sistem

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)} \right]}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & \text{jika } 0 \leq n \leq s \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! s^{n-s}} P_0, & \text{jika } n > s \end{cases}$$

3. Jumlah Rata-Rata Pelanggan dalam Sistem

$$L_s = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{\lambda}{s\mu}}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu} \right)^2} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P}{s! (1 - P)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_s = \lambda W = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Jumlah Rata-Rata Pelanggan dalam Antrian

$$Lq = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{\lambda}{s\mu}}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu} \right)^2} = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P}{s! (1 - P)^2}$$

5. Waktu Rata-Rata dalam Sistem

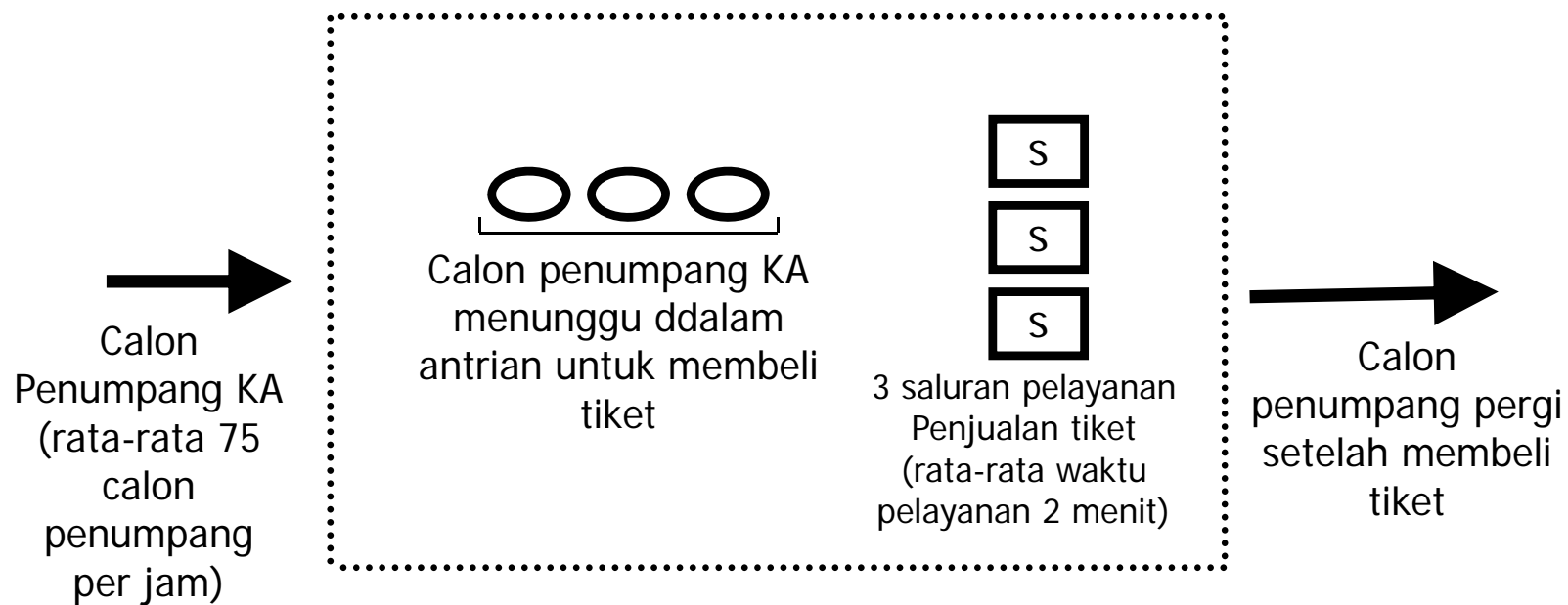
$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Waktu Rata-Rata dalam Antrian

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda}$$

Contoh

Calon penumpang kereta api datang pada 3 loket dengan mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 75 calon pelanggan per jam. Jika waktu pelayanan diasumsikan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata 2 menit. Carilah operating characteristics setelah sistem diasumsikan steady state !



Model Penjualan Tiket KA

Penyelesaian

Diketahui $\lambda = 75$ calon pelanggan per jam

$\mu = 30$ calon pelanggan per jam

$s = 3$ loket

1. Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\left[\frac{\left(\frac{75}{30}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{75}{30}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{75}{30}\right)^2}{2!} \right] + \frac{\left(\frac{75}{30}\right)^3}{3! \left(1 - \frac{75}{3 \cdot 30}\right)}} \\ &= \frac{1}{6,6625 + 15,625} \\ &= 0,0449 \end{aligned}$$

2. Jumlah rata-rata calon penumpang dalam antrian

$$L_q = \frac{(0,0449) \left(\frac{75}{30} \right)^3 \frac{75}{3.30}}{3! \left(1 - \frac{75}{3.30} \right)^2}$$

$= 3,5 \approx 4$ calon penumpang menunggu

3. Jumlah rata-rata calon penumpang dalam sistem

$$L_s = 3,5 + \frac{75}{30}$$

$= 6$ calon penumpang dalam sistem

4. Waktu menunggu setiap calon penumpang selama dalam antrian

$$W_q = \frac{3,5}{75} = 0,0467 \text{ jam} = 2,8 \text{ menit}$$

5. Waktu setiap calon penumpang berada dalam sistem

$$W_s = 0,0467 \text{ jam} + \frac{1}{30} \text{ jam} = 4,8 \text{ menit}$$