APLIKASI INTEGRAL TENTU

**3**

|  |
| --- |
| JUMLAH PERTEMUAN : 3 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :  Memahami penggunaan integral tentu |

**Materi :**

* 1. **Luas Daerah**

1. Misalkan daerah Luas R?

R

a

b

y = f(x)

Langkah-langkah:

1. Iris R menjadi n bagian dari luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi f(x). alas (lebar)
2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

Contoh:

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva , sumbu x dan x = 2?

Luas irisan :

Luas daerah :

2

R

1. Misalkan daerah . Luas R?

Langkah:

1. Iris R menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi (h(x) – g(x)) dan alas
2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh

R

a

b

y = g(x)

y = h(x)

h(x) – g(x)

**Contoh:**

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis dan parabola

**Jawab:**

Titik potong antara garis dan parabola:

Maka titik potongnya : x = 3 dan x = -2

Luas irisan :

Sehingga luas daerah:

Catatan : Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak di atas dikurangi kurva yang dibawahnya. Jika batas atas dan batas bawah irisan berubah untuk sebarang irisan di R maka daerah R harus dibagi dua atau lebih.

Contoh:

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, dan

Jawab:

Jika dibuat irisan yang tegak lurus dengan sumbu x, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian.

Luas daerah I:

Luas daerah II:

Sehingga luas daerah:

I

II

1. Misalkan daerah . Luas R?

c

d

Langkah:

1. Iris R menjadi n selang dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi dengan tinggi [h(y) - g(y)] dan alas
2. Luas R dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

**Contoh:**

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh dan

**Jawab:**

Titik potong:

Jadi titik potongnya: y = -2 dan y = 1

Luas irisan :

Sehingga luas daerah:

Catatan: Jika irisan sejajar dengan sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang terletak disebelah kiri. Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sebarang irisan R maka daerah R harus dibagi dua atau lebih.

* 1. **Menghitung Volume Benda Putar**
     1. **Metode cakram**

1. Daerah diputar terhadap sumbu x. Berapa volume benda tersebut?

a

b

R

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan, dan ambil limitnya.

Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari f(x). sehingga

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cakram. Dengan mengambil limitnya diperoleh

a

b

R

**Contoh:**

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh , sumbu x, dan garis x = 2 diputar terhadap sumbu x.

Jawab:

Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari dan tebal .

Sehingga

Volume benda putar

2

1. Daerah diputar terhadap sumbu y?

c

d

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan, dan ambil limitnya.

Δy

g(y)

c

d

Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi g(y) dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan jari-jari g(y). Sehingga

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cakram. Dengan mengambil limitnya diperoleh

**Contoh:**

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh dan garis y = 4, sumbu y diputar terhadap sumbu y.

**Jawab:**

Δy

Jika irisan dengan tinggi dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari dan tebal Δy. Sehingga

Volume benda putar

* + 1. **Metode Cincin**

1. Daerah diputar terhadap sumbu x. Berapa volume benda putar yang terjadi?

h(x)

g(x)

a

b

R

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.

Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi h(x) – g(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δx dan jari-jari luar h(x) dan jari-jari dalamnya g(x). Sehingga

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cincin. Dengan mengambil limitnya diperoleh

h(x)

g(x)

a

b

R

Δx

g(x)

h(x)

Δx

**Contoh**:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh , sumbu x, dan garis x = 2 diputar terhadap garis y = -1.

**Jawab:**

Jika irisan diputar terhadap garis akan diperoleh suatu cincin dengan jari-jari dalam 1 dan jari-jari luar . Sehingga

Volume benda putar:

2

1. Daerah diputar terhadap sumbu y. Berapa volume benda putar yang terjadi?

c

d

R

g(y)

h(y)

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.

c

d

R

g(y)

h(y)

Δy

Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi h(y) – g(y) dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δy dan jari-jari luar h(y) dan jari-jari dalamnya g(y). Sehingga

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume cincin. Dengan mengambil limitnya diperoleh

**Catatan**: Metode cincin irisan dibuat tegak lurus dengan sumbu putar.

* + 1. **Metode Kulit Tabung**

1. Misal daerah diputar terhadap sumbu y. Berapa volume benda putar?

R

a

b

y = f(x)

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah, dan ambil limitnya.

R

a

b

y = f(x)

Δx

Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu tabung kosong dengan tebal Δx dan jari-jari dalam x. Sehingga

x

Δx

f(x)

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume kulit tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

Δx

f(x)

**Contoh:**

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh , x = 4, y = 0; mengelilingi sumbu x = 4

**Jawab:**

x = 4

Δx

Jika irisan diputar terhadap garis x = 4 akan diperoleh suatu tabung kosong dengan jari-jari 4 – x dan tinggi tabung

Volume benda putar:

1. Misal daerah diputar terhadap y. Berapa volume benda putar?

h(x)

g(x)

a

b

R

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah, dan ambil limitnya.

Δx

x

Δx

h(x)

g(x)

a

b

R

Δx

Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi dan alas diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu tabung kosong dengan tebal dan jari-jari dalam tabung x. Sehingga

Volume benda putar dihampiri oleh jumlah volume kulit tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

**Contoh:** Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R yang dibatasi oleh , mengelilingi sumbu y.

Titik potong:

Jadi titik potong adalah x = 0 dan x = 2

Jika irisan diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu tabung kosong dengan jari-jari x dan tinggi tabung

Volume benda putar:

**Jawab:**

2

**Catatan**: Metode kulit tabung irisan dibuat sejajar dengan sumbu putar

* 1. **Panjang Kurva**

**Kurva Rata**

Kurva Rata adalah kurva yang terletak seluruhnya pada sebuah bidang.

Contoh:

, t = parameter

Sebuah kurva rata disebut mulus apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan , , , dengan ketentuan bahwa turunan-turunan f’ dan g’ adalah kontinu ada [a,b] sedangkan f’(t) dan g’(t) tidak bersama-sama nol di selang [a,b].

**Panjang kurva**

Misal sebuah kurva . Panjang kurva tersebut adalah?

Untuk menghitung panjang kurva gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.

Hampiran

Gunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan

Maka Hampiran dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan diperoleh

Panjang kurva dihampiri oleh jumlah panjang sisi miring. Dengan mengambil limitnya diperoleh

Jika yang diketahui adalah kurva , maka panjang kurva:

Jika yang diketahui adalah kurva , maka panjang kurva:

Contoh: Tentukan keliling lingkaran

Jawab:



,

Maka

Contoh: tentukan panjang ruas garis dengan persamaan ,

Jawab:



**Diferensial Panjang Kurva**

Misal f dapat dideferensialkan ada [a,b]. Untuk setiap kita definisikan s(x) melalui

Maka s(x) panjang kurva y = f(u) antara titik (a,f(a)) dan titik (x,f(x)). Maka

Maka

(a,f(a))

(x,f(x))

s(x)

* 1. **Luas Permukaan Benda Putar**

1. Misal kurva , diputar terhadap sumbu x. Berapa luas permukaan benda putar tersebut?

a

b

yi

Untuk menghitung luas permukaan benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.

Jika irisan kurva yang berbentuk garis dan tinggi yi terhadap sumbu x akan diperoleh tabung kosong dengan tinggi Δsi dan jari-jari yi. Sehingga

Luas permukaan benda putar dihampiri oleh jumlah luas permukaan tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

Jadi jika y = f(x) maka

jika x = g(y) maka

**Contoh:**

Tentukan luas permukaan benda putar apabila kurva , , diputar mengelilingi sumbu x.

**Jawab:**

Maka hampirannya:

Maka luas permukaannya:

* 1. **Latihan**

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh fungsi dan
2. Tentukan volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh , , dan diputar mengelilingi sumbu x. Gambarlah
3. Tentukan volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh , , dan diputar mengelilingi garis . Gambarlah