|  |
| --- |
| **5**  **TURUNAN** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 4 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :  Memahami konsep dasar turunan fungsi dan menggunakan turunan fungsi pada permasalahan yang ada |

**Materi :**

* 1. **Pendahuluan**

Ide awal adanya turunan adalah karena adanya permasalahan garis singgung di titik

P

c

c+h

h

Tali busur

Garis singgung

adalah tali busur untuk kurva , dengan kemiringan

Maka kemiringan garis singgung di titik P:

**Contoh:**

Jika , tentukan kemiringan garis di titik:

**Jawab:**

Untuk menyelesaikan permasalahan diatas karena hanya yang berubah hanya titiknya saja maka dapat dikerjakan secara langsung, dengan cara mengerjakan secara umum untuk di titik :

Karena maka dan

Maka

Maka kemiringan garis singgung kurva adalah , jadi

1. kemiringan garis singgung fungsi di titik adalah , maka kemiringan garis singgung di titik adalah
2. kemiringan garis singgung fungsi di titik adalah , maka kemiringan garis singgung di titik adalah
3. kemiringan garis singgung fungsi di titik adalah , maka kemiringan garis singgung di titik adalah

Dapat dilihat bahwa kemiringan garis singgung fungsi di titik adalah , maka kemiringan garis singgung di titik adalah . Ini sama seperti ketika kita mencari turunan fungsi yaitu

* 1. **Definisi**

**Turunan** fungsi adalah fungsi lain (dibaca “ aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan adalah

asalkan limitnya ini ada.

* 1. **Notasi dari turunan**

1. Notasi aksen,
2. Notasi d,
3. Notasi Leibniz,

Contoh:

Andaikan . Cari .

Jawab:

Contoh:

Jika , cari D!

Jawab:

Contoh:

Jika , cari !

Jawab:

* 1. **Bentuk yang setara untuk turunan**

P

c

x

Tali busur

Garis singgung

Kemiringan garis yang melalui dan adalah

Maka kemiringan garis singgung di titik :

Seperti yang dikatakan diatas bahwa ketika mencari kemiringan garis singgung dari suatu fungsi sama saja seperti kita mencari turunan fungsi tersebut titik yang tersinggung oleh garis singgung maka

Maka kemiringan garis singgung di titik :

Contoh:

Andaikan . Cari .

Jawab:

Jika , cari !

Jawab:

* 1. **Keterdiferensialan menunjukkan kekontinuan**

Jika sebuah kurva mempunyai sebuah garis singgung di sebuah titik, maka kurva itu tidak dapat melompat atau sangat berayun di titik tersebut. Perumusan yang persis dari kenyataan ini merupakan sebuah teorema penting.

**Teorema**

Jika ada, maka kontinu di .

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku.

Contoh:

Jika , tentukan apakah fungsi kontinu di ?

Jawab:

Tanpa harus membuktikan

1. ada
2. ada

Berdasarkan teorema diatas maka:

Karena fungsi ada turunannya di , maka dapat dikatakan fungsi kontinu di

Contoh (penyangkal teorema):

Jika , tentukan

Jawab:

Limit ini tidak ada karena

Sedangkan

Karena limit kanan dan limit kirinya tidak sama.

* 1. **Aturan Pencarian Turunan**
     1. **Fungsi konstanta**

Fungsi konstanta mempunyai grafik berupa garis horisontal, sehingga kemiringannya nol dimana-mana.

**Teorema (Aturan Fungsi Konstanta)**

Jika dengan suatu konstanta maka untuk sebarang , , yakni

Bukti

* + 1. **Fungsi identitas**

**Teorema (Aturan Fungsi Identitas)**

Jika , maka , yakni

Bukti

* + 1. **Fungsi polinom**

**Teorema (Aturan Pangkat)**

Jika , dengan , maka , yakni

Bukti

Contoh:

Jika , cari

Jawab:

* + 1. **D adalah sebuah operator linier**

**Teorema (Aturan Kelipatan Konstanta)**

Jika suatu konstanta dan suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka , yakni

Bukti

Andaikan . Maka

Contoh:

Jika , cari

Jawab:

**Teorema (Aturan Jumlah)**

Jika dan fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka , yakni

Contoh:

Jika , cari

Jawab:

**Teorema (Aturan Selisih)**

Jika dan fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka , yakni

Contoh:

Jika , cari

Jawab:

**Teorema (Hasil kali)**

Jika dan fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka , yakni

Contoh:

Jika , cari

Jawab:

**Teorema (Aturan Hasilbagi)**

Jika dan fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka , yakni

Contoh:

Jika , cari

Jawab:

* + 1. **Fungsi sinus dan kosinus**

Jika , tentukan

Ingat bahwa

Maka

Jika , tentukan

Contoh:

Jika , maka ?

Jawab

Karena , maka

Misalkan dan

* 1. **Aturan Rantai**

**Teorema (Aturan Rantai)**

Andaikan dan menentukan fungsi komposit . Jika terdiferensialkan di dan terdiferensialkan di , maka terdiferensialkan di dan

Yakni

Contoh

Jika , cari

Jawab

Misal dan , maka dan

Jadi,

* 1. **Aturan Rantai Bersusun**

Andaikan

Maka

Contoh

Cari

Jawab:

Misal

maka

maka

dan maka

Maka

Jangan lupa untuk mengganti pemisalan yang sebelumnya yaitu , , dan , maka diperoleh

* 1. **Notasi Leibniz**

Perbandingan yang menggambarkan kemiringan talibusur yang melalui

Jika , kemiringan talibusur ini mendekati kemiringan garis singgung, dan untuk kemiringan ini disebut kemiringan Leibniz menggunakan lambang . Sehingga

x

Contoh

Cari jika

Penyelesaian:

* + 1. **Aturan Rantai**

Andaikan bahwa dan . Dalam notasi Leibniz, Aturan Rantai:

Contoh:

Cari jika

Jawab

Misal dan , maka

Contoh:

Cari , jika

Jawab:

Misal , dan , maka , dan

* 1. **Turunan Tingkat Tinggi**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Turunan | Notasi | Notasi | Notasi | Notasi  Leibniz |
| Pertama |  |  |  |  |
| Kedua |  |  |  |  |
| Ketiga |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Ke-n |  |  |  |  |

Contoh:

Jika , cari , , .

Jawab:

* 1. **Pendiferensialan Implisit**

Contoh:

Jika tentukan

Jawab:

Cara 1

Dapat diselesaikan dengan mengubahnya kedalam fungsi eksplisit terlebih dahulu

Maka

Cara 2

Didiferensialkan secara bersamaan untuk kedua ruas

Tampak terlihat hasilnya berbeda dengan metode 1, tapi jika kita substitusi nilai maka diperoleh

* 1. **Diferensial**
     1. **Definisi**

Andaikan terdiferensialkan di dan andaikan bahwa , diferensial dari variabel bebas menyatakan pertambahan sebarang dari . Diferensial yang bersesuaian dengan dari variabel tak bebas didefinisikan oleh

Contoh:

Cari jika

Jawab:

Aturan-aturan utama diferensial dan turunan dapat digambarkan

|  |  |
| --- | --- |
| Aturan Turunan | Aturan Diferensial |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

* + 1. **Aproksimasi**

Formula aproksimasi:

Contoh:

Tentukan aproksimasi dari adalah

Jawab:

Misal

Maka aproksimasi dari adalah

Sedangkan di dan mempunyai nilai

Jadi

* 1. **Latihan**

1. Tentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan untuk fungsi-fungsi berikut:
2. Tentukan turunan fungsi dengan menggunakan aturan pencarian turunan untuk fungsi-fungsi pada nomor 1. Untuk membuktikan bahwa jawaban anda sudah benar.
3. Tentukan turunan fungsi dari fungsi-fungsi berikut:
4. Tentukan turunan kedua dari fungsi-fungsi berikut:
5. Tentukan turunan dari fungsi berikut: