|  |
| --- |
| **6**  **PENGGUNAAN TURUNAN** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :  Menerapkan konsep dasar turunan fungsi dalam menentukan karakteristik grafik fungsi dan menggambarkan grafik |

**Materi :**

* 1. **Maksimum dan Minimum**

Definisi

Andaikan , daerah asal , memuat titik . Kita katakan bahwa:

1. adalah **nilai maksimum**  pada jika untuk semua di ;
2. adalah **nilai minimum**  pada jika untuk semua di ;
3. adalah **nilai ekstrim**  pada jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Contoh:

Misalkan maka

Pada , tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya). Tetapi mempunyai nilai minimum



Teorema

**(Teorema Eksistensi Maks-Min)**. Jika kontinu pada selang tertutup , maka mencapai nilai maksimum dan nilai minimum.

**Di mana terjadinya nilai-nilai ekstrim**

Teorema

**(Titik kritis).** Andaikan didefinisikan pada selang yang memuat titik . Jika adalah titik ekstrim, maka haruslah suatu titik kritis; yakni berupa salah satu:

1. Titik ujung dari
2. Titik stasioner dari ();
3. Titik singular dari ( tidak ada).

Contoh:

Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari

Pada

Jawab:

Titik-titik kritis untuk fungsi di atas adalah , 0, 1, 2. Sekarang akan diperiksa pada titik kritis tersebut akan menghasilkan nilai-nilai: , , dan . Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada dan 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada 2). Grafik diperlihatkan dalam gambar disamping



Contoh:

Kotak persegi-panjang dibuat dari selembar papan, panjang 24 inci dan lebar 9 inci, dengan memotong bujur sangkar identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa volume ini?





Jawab:

Andaikan adalah sisi bujur sangkar yang harus dipotong dan adalah volume kotak yang dihasilkan. Maka

Sekarang tidak dapat lebih kecil dari 0 ataupun lebih dari 4,5. Jadi, masalahnya sekarang adalah memaksimumkan pada . Titik-titik statsioner ditemukan dengan menetapkan sama dengan nol dan menyelesaikan persamaan yang dihasilkan:

Ini memberikan atau , tetapi 9 tidak ada pada selang . Jadi titik-titik kritis adalah 0, 2, 4,5. Nilai-nilai ekstrim yang diperoleh ; ; . Jadi disimpulkan bahwa volume maksimum dari kotak tersebut 200 inci kubik jika , yakni kotak berukuran panjang 20 inci, lebar 5 inci, dan tinggi 2 inci.

**6.2 Kemotonan dan Kecekungan**

Definisi

Andaikan terdefinisi pada selang (terbuka, tertutup, atau tak satupun). Kita katakan bahwa:

1. adalah **naik** pada jika untuk setiap bilangan dan dalam .
2. adalah **turun** pada jika untuk setiap pasangan bilangan dan dalam .
3. **monoton murni** pada jika ia naik pada atau turun pada .

**Turunan pertama dan kemonotonan**

Teorema

**(Teorema Kemonotonan).** Andaikan kontinu pada selang dan dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam dari .

1. Jika untuk semua titik dalam dari , maka naik pada
2. Jika untuk semua titik dalam dari , maka turun pada .

Contoh

Jika , cari di mana naik dan di mana turun.

Jawab:

Kita perlu menentukan dimana dan juga di mana .



Sumbu terbagi menjadi 3 selang yaitu , , dan .

**Turunan Kedua dan Kecekungan**.

Definisi

Andaikan terdiferensial pada selang terbuka . Jika naik pada , (dan grafiknya) **cekung ke atas** di sana; jika turun pada , **cekung ke bawah** pada .

Teorema

**(Kecekungan).** Andaikan terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka

1. Jika untuk semua dalam , maka **cekung ke atas** pada .
2. Jika untuk semua dalam , maka **cekung ke bawah** pada .

Contoh

Di mana naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah?

Jawab



Maka untuk selang dan naik dan untuk selang turun. Pada selang cekung ke bawah dan pada selang cekung ke atas. Dapat dilihat gambar disamping.

(-)

(+)

(+)



3

-1

**6.3 Titik Balik**

Andaikan kontinu di . Misal suatu **titik balik** dari grafik jika cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari . Titik-titik di mana atau tidak ada merupakan calon-calon untuk titik balik.

**6.4 Asimtot**

Garis adalah **asimtot vertikal** dari grafik jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar.

Garis adalah **asimtot horisontal** dari grafik jika

**6.5 Penggambaran Grafik Canggih**

**Contoh:**

Sketsa grafik

**Jawab:**

1. Karena , maka adalah fungsi ganjil, maka grafik simetri terhadap titik asal
2. Mencari titik potong

Akar fungsi diatas:

1. Menentukan kemonotonan

Maka stasioner

Maka



1. Menentukan cekung/cembung

Maka titik balik

Maka

(-)

(+)

(+)

(-)

0

1. Asimtot jika ada

Tidak ada

Maka sketsa fungsi



Ringkasan metode:

1. Periksa daerah asal dan daerah hasil fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan
2. Uji kesimetrian terhadap sumbu y dan titik asal.
3. Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat
4. Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan untuk mengetahui tempat-tempat grafik naik dan turun.
5. Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal
6. Gunakan turunan kedua untuk mengetahui tempat-tempat grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk melokasikan titik-titik balik
7. Cari asimtot-asimtot
8. Tentukan beberapa pasangan koordinat
9. Sketsa grafik.
   1. **Latihan**
10. Diketahui:
11. Tentukan selang kemonotonan dan ekstrim fungsi
12. Tentukan selang kecekungan dan titik belok
13. Tentukan semua asimtot
14. Gambarkan grafik