**4**

 **LIMIT**

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Memahami konsep dasar limit, teorema dan penggunaan limit

**Materi :**

* 1. **Pendahuluan**

Perhatikan fungsi di bawah ini:

$$f\left(x\right)=\frac{x^{2}-1}{x-1}$$

Perhatikan gambar di samping, untuk nilai $x=1$ nilai $f\left(x\right)$ tidak ada. Tetapi jika kita coba dekati nilai $x=1$ dari sebelah kiri dan kanan maka dapat dilihat

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
| $$f\left(x\right)$$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | ? | 2.001 | 2.01 | 2.1 |

Perhatikan jika $x$ mendekati 1 dari kiri $f\left(x\right)$ mendekati nilai 2 dan jika $x$ mendekati 1 dari kanan $f\left(x\right)$ mendekati nilai 2.

Secara matematik kejadian di atas ditulis

$$\lim\_{x\to 1}f\left(x\right)=2$$



* 1. **Definisi Limit**

Secara intuisi definisi limit:

$$\lim\_{x\to c}f\left(x\right)=L$$

Menyatakan bahwa limit fungsi $f$ di c adalah $L$, artinya $f\left(x\right)$ dekat dengan L jika $x$ dekat ke $c$, dan $x\ne c$.

Definisi limit secara matematis

$$\lim\_{x\to c}f\left(x\right)=L$$

Menyatakan:

$$∀ε>0,∃δ>0\ni 0<\left|x-c\right|<δ\rightarrow \left|f\left(x\right)-L\right|<ε$$

**4.2.1 Limit Kiri dan Limit Kanan**

$$\lim\_{x\to c^{-}}f\left(x\right)=L$$

Jika x dekat tetapi sebelah kiri, maka $f\left(x\right)$ mendekati $L$

c

x

$$\lim\_{x\to c^{+}}f\left(x\right)=L$$

Jika x dekat tetapi sebelah kanan, maka $f\left(x\right)$ mendekati $L$

c

x

* 1. **Teorema Limit**

**4.3.1 Teorema A**

$\begin{matrix}lim\\x\rightarrow c\end{matrix}f\left(x\right)=L$ jika dan hanya jika $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c^{-}\end{matrix}f\left(x\right)=L$ dan $\begin{matrix}lim\\x\rightarrow c^{+}\end{matrix}f\left(x\right)=L$

**Contoh:**

Perhatikan fungsi berikut:

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}x^{2}&x\leq 0\\x&0<x<1\\1+x^{2}&x\geq 1\end{matrix}\right.$$

Tentukan:

1. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 0\end{matrix}f\left(x\right)=$(jika ada)
2. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 1\end{matrix}f\left(x\right)=$ (jika ada)
3. Sketsa grafik tersebut.

Jawab:

1. Akan ditentukan $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 0 \end{matrix}f\left(x\right)=$

$$\lim\_{x\to 0^{-}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 0^{-}}x^{2}=0$$

$$\lim\_{x\to 0^{+}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 0^{+}}x=0$$

Karena limit kiri = limit kanan maka
$$\lim\_{x\to 0}f\left(x\right)=0$$

1. Akan ditentukan $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 1 \end{matrix}f\left(x\right)=$

$$\lim\_{x\to 1^{-}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 1^{-}}x=1$$

$$\lim\_{x\to 1^{+}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 1^{+}}1+x^{2}=2$$

Karena limit kiri $\ne $ limit kanan maka $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 1 \end{matrix}f\left(x\right)$ tidak ada



**4.3.2 Teorema limit utama**

Andaikan $n$ bilangan bulat positif, $k$ konstanta, dan $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang memunyai limit di $c$. Maka

1. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}k=k$
2. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}x=c$
3. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}kf\left(x\right)=k\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)$
4. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)+\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)$
5. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]=\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)-\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)$
6. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]=\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right).\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)$
7. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)}{\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)}$, asalkan $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)\ne 0$
8. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}\left[f\left(x\right)\right]^{n}=\left[\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)\right]^{n}$
9. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}\sqrt[n]{f\left(x\right)}=\sqrt[n]{\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)}$, asalkan $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)>0$ bilamana $n$ genap

Contoh:

Tentukan nilai dari:

$$\lim\_{x\to 4}\left(3x^{2}-2x\right)$$

Jawab:

$$\lim\_{x\to 4}\left(3x^{2}-2x\right)=\lim\_{x\to 4}3x^{2}-\lim\_{x\to 4}2x=3\lim\_{x\to 4}x^{2}-2\lim\_{x\to 4}x=3\left(\lim\_{x\to 4}x\right)^{2}-2\lim\_{x\to 4}x=3\left(4\right)^{2}-2.4=40$$

**4.3.3 Teorema substitusi**

Jika $f$ suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim\_{x\to c}f\left(x\right)=f\left(c\right)$$

asalkan dalam kasus rasional nilai penyebut di $c$ tidak nol.

Contoh:

Tentukan nilai dari:

$$\lim\_{x\to 4}\left(3x^{2}-2x\right)$$

Jawab:

$$\lim\_{x\to 4}\left(3x^{2}-2x\right)=3\left(4\right)^{2}-2\left(4\right)=40$$

**4.3.4 Teorema Apit**

Andaikan $f$, $g$, dan $h$ adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\leq h\left(x\right)$ untuk semua $x$ dekat $c$, kecuali mungkin di $c$. Jika

$$\lim\_{x\to c}f\left(x\right)=\lim\_{x\to c}h\left(x\right)=L$$

Maka

$$\lim\_{x\to c}g\left(x\right)=L$$

Contoh:

Tentukan

$$\lim\_{x\to 1}\left(x-1\right)^{2}\sin(\left(\frac{1}{x-1}\right))$$

Jawab:

$$-1\leq \sin(\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq 1)$$

$$-\left(x-1\right)^{2}\leq \left(x-1\right)^{2}\sin(\left(\frac{1}{x-1}\right))\leq \left(x-1\right)^{2}$$

Karena

$$\lim\_{x\to 1}-\left(x-1\right)^{2}=0$$

Dan

$$\lim\_{x\to 1}\left(x-1\right)^{2}=0$$

Maka

$$\lim\_{x\to 1}\left(x-1\right)^{2}\sin(\left(\frac{1}{x-1}\right))=0$$

**4.3.5 Kekontinuan di satu titik**

Fungsi $f$ dikatakan kontinu di titik $x=c$, jika

1. $f\left(c\right)$ ada
2. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)$ ada
3. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)=f\left(c\right)$

Jika salah satu syarat tidak dipenuhi maka fungsi $f$ dapat dikatakan tidak kontinu di $x=c$.

**4.3.6 Teorema limit komposit**

Jika $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)=L$ dan jika $f$ kontinu di $L$, maka

$$\lim\_{x\to c}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim\_{x\to c}g\left(x\right)\right)=f\left(L\right)$$

Khususnya, jika $g$ kontinu di $c$ dan $f$ kontinu di $g\left(c\right)$, maka fungsi kompisit $f∘g$ kontinu di $c$.

**4.3.7 Kekontinuan pada selang**

Fungsi $f$ dikatakan **kontinu pada selang terbuka** $\left(a,b\right)$ jika $f$ kontinu di setiap titik $\left(a,b\right)$. $f$  **kontinu pada selang tertutup** $\left[a,b\right]$ jika kontinu pada $\left(a,b\right)$, kontinu kanan di $a$ dan kontinu kiri di $b$.

**4.3.8 Teorema Nilai Antara**

Jika $f$ kontinu pada $\left[a,b\right]$ dan jika $W$ sebuah bilangan antara $f\left(a\right)$ dan $f\left(b\right)$, maka terdapat sebuah bilangan $c$ di antara $a$ dan $b$ sedemikian sehingga $f\left(c\right)=W$.

**4.3.9 Limit tak hingga**

Jika $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}f\left(x\right)=L,L\ne 0$ dan $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow c \end{matrix}g\left(x\right)=0$ maka

$$\lim\_{x\to c}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=$$

1. $-\infty $, jika $L>0$ dan $g\left(x\right)$ menuju 0 dari bawah (arah nilai $g\left(x\right)$ yang negatif)
2. $\infty $, jika $L>0$ dan $g\left(x\right)$ menuju 0 dari atas (arah nilai $g\left(x\right)$ yang positif)
3. $\infty $, jika $L<0$ dan $g\left(x\right)$ menuju 0 dari bawah (arah nilai $g\left(x\right)$ yang negatif)
4. $-\infty $, jika $L<0$ dan $g\left(x\right)$ menuju 0 dari atas (arah nilai $g\left(x\right)$ yang positif)

Contoh:

Tentukan limit:

$$\lim\_{x\to 1^{-}}\frac{x^{2}+1}{x-1}=$$

Jawab:

Jika disubstitusi langsung akan menghasilkan $\frac{2}{0}$, maka tidak dapat menggunakan teorema substitusi.

Maka

$$\lim\_{x\to 1^{-}}x^{2}+1=2>0$$

$\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 1^{-} \end{matrix}x-1$ menuju nol dari bawah. Oleh karena itu,

$$\lim\_{x\to 1^{-}}\frac{x^{2}+1}{x-1}=-\infty $$

**4.3.10 Limit di tak hingga**

Tentukan nilai

$$\lim\_{n\to \infty }\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=$$

Jika $f$ dan $g$ adalah fungsi polinom.

Untuk menentukan nilai limit di atas perhatikan pangkat tertinggi fungsi $f$ dan $g$ :

1. Jika pangkat pembilang (fungsi $f$) lebih besar dibanding pangkat penyebut (fungsi $g$) maka nilainya $\infty atau-\infty $.

Contoh: Tentukan nilai

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}-4}{x-2}$$

Jawab:

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}-4}{x-2}=\lim\_{x\to \infty }\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}=\lim\_{x\to \infty }x+2=\infty $$

1. Jika pangkat pembilang (fungsi $f$) lebih kecil dibanding pangkat penyebut (fungsi $g$) maka nilainya 0.

Contoh: Tentukan nilai

$$\lim\_{x\to -\infty }\frac{x^{2}-4x+4}{x^{4}-3x}$$

Jawab:

$$\lim\_{x\to -\infty }\frac{x^{2}-4x+4}{x^{4}-3x}=\lim\_{x\to -\infty }\frac{x^{2}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^{2}}\right)}{x^{2}\left(x^{2}-\frac{3}{x}\right)}=\lim\_{x\to -\infty }\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^{2}}}{x^{2}-\frac{3}{x}}=\frac{1}{\infty }=0$$

1. Jika pangkat pembilang (fungsi $f$) sama dengan pangkat penyebut (fungsi $g$) maka nilainya begantung dengan koefisien suku pangkat tertinggi.

Contoh: Tentukan nilai

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}-4x+4}{x^{2}-1}$$

Jawab:

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}-4x+4}{x^{2}-1}=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^{2}}\right)}{x^{2}\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)}=\lim\_{x\to \infty }\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^{2}}}{1-\frac{1}{x^{2}}}=\frac{1}{1}=1$$

**Latihan**

1. Cari limit yang ditunjukkan
2. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 3 \end{matrix}\left(\frac{2}{x}+1\right)$ c. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 1 \end{matrix}\frac{x^{2}+6x-7}{x^{2}-1}$
3. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 3 \end{matrix}\frac{x^{2}-2x-3}{x-3}$ d. $\begin{matrix}lim⁡\\x\rightarrow 0 \end{matrix}\frac{sin^{2}x}{x}$
4. Carilah limit yang ditunjukkan atau nyatakan jika tidak ada.
5. $\begin{matrix}lim⁡\\u\rightarrow 1 \end{matrix}\frac{u^{2}-1}{u+1}$ b. $\begin{matrix}lim⁡\\z\rightarrow 2 \end{matrix}\frac{z^{2}-4}{z^{2}+Z-6}$
6. Nyatakan apakah fungsi yang ditunjukkan kontinu atau tidak di 2: jika takkontinu jelaskan sebabnya
7. $f\left(x\right)=4x^{2}-2x+12$ c. $f\left(x\right)=\frac{8}{x-2}$
8. $h\left(t\right)=\left\{\begin{matrix}\frac{4t-8}{t-2}&jika t\ne 2 \\2&jika t=2\end{matrix}\right.$
9. Tentukan nilai $a$ dan $b$ sehingga fungsi berikut kontinu dimana-mana dan kemudian gambarkan grafik fungsi tersebut:

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}ax+5&x\leq 1\\3x^{2}+1&1<x\leq 5\\3x-b&x<5\end{matrix}\right.$$