

METODE SIMPLEKS

Pertemuan Ke-4

Team Dosen Riset Operasional
Program Studi Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan (1)

- ▶ Metode simpleks merupakan sebuah prosedur matematis berulang untuk menemukan penyelesaian optimal soal program linier.
- ▶ Digunakan jika variabel keputusan lebih besar dari dua (karena sulit menggambarkan grafik berdimensi banyak)
- ▶ Dirancang untuk menyelesaikan masalah PL yang melibatkan dua variabel atau lebih
- ▶ Prinsipnya metode ini menyelesaikan masalah PL melalui perhitungan ulang (iterasi) dimana langkah-langkah perhitungan yang sama diulang berkali-kali sampai solusi optimum diperoleh.

Pendahuluan (2)

- ▶ Model PL harus diubah ke dalam bentuk umum (*standar form*) yang memiliki sifat-sifat :
 1. Semua pembatas harus berbentuk persamaan(=) dengan ruas kanan non-negatif
 2. Semua variabel non-negatif
 3. Fungsi tujuan dapat maksimum/minimum

Terminologi (1)

▶ Variabel **Slack** :

- Membuat nilai ruas kiri sama dengan ruas kanan pada kendala yang berupa pembatas
- Menampung sisa kapasitas/kapasitas yang tidak digunakan pada kendala yang berupa pembatas

• Variabel **Surplus** :

- Membuat nilai ruas kiri sama dengan nilai ruas kanan pada kendala yang berupa syarat.
- Menampung kelebihan nilai ruas kiri pada kendala yang berupa syarat.

Terminologi (2)

- ▶ Variabel **artifisial** berfungsi untuk memperluas daerah fisibel
- ▶ Variabel **non-basis** adalah variabel yang bernilai nol.
- ▶ Variabel **basis** adalah variabel yang bernilai positif

Bentuk Standar PL

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maks/Min} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Fungsi Pembatas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

dimana ;

c_n : *cost/profit*

a_{mn} : parameter pembatas

x_n : variabel keputusan

b_m : pembatas

Cara Transformasi Bentuk Formulasi

1. Pembatas/Constrain

- Pembatas/kendala menunjukkan keterbatasan penggunaan suatu sumber daya.
- Pembatas bertanda \leq atau \geq diubah jadi persamaan (=) dengan menambahkan suatu variabel **slack** atau mengurangi suatu variabel **surplus** di ruas kiri pembatas.

Contoh :

$X_1 + X_2 \leq 15$ ditambahkan variabel **slack** $S_1 \geq 0$ pada ruas kiri sehingga diperoleh persamaan ;

$$X_1 + X_2 + S_1 = 15$$

Contoh :

$3X_1 + 2X_2 - 3X_3 \geq 15$ dikurangkan **surplus** variabel $S_1 \geq 0$ dan ditambahkan variabel **dummy** (variabel **artifisial** /R) $R_1 \geq 0$ pada ruas kiri sehingga diperoleh persamaan ;

$$3X_1 + 2X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15$$

Contoh :

$3X_1 + 2X_2 = 18$ ditambahkan variabel **dummy** (variabel **artifisial** /R) $R_1 \geq 0$ pada ruas kiri sehingga diperoleh persamaan ;

$$3X_1 + 2X_2 + R_1 = 18$$

- Ruas kanan pada persamaan yang bersifat/bernilai negatif dapat diubah jadi positif dengan mengalikan ruas kiri & ruas kanan dengan (-1)

Contoh :

$$(-5X_1 + X_2 = -25) \times (-1) \Rightarrow 5X_1 - X_2 = 25$$

- Pertidaksamaan fungsi pembatas dapat berubah arah dengan mengalikan ruas kiri & ruas kanan dengan (-1)

Contoh :

$$(-5X_1 + X_2 \leq -25) \times (-1) \Rightarrow 5X_1 - X_2 \geq 25$$

- Jika fungsi pembatas mempunyai bentuk :

$$| a_{11} x_1 + a_{12} x_2 | \leq b_1$$

maka nilainya :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \quad \text{dan} \quad -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 \geq b_1$$

2. Variabel

Jika suatu variabel keputusan tidak terbatas dalam tanda, maka akan mempunyai dua nilai berdasarkan pada persamaan :

$$y_i = y_i' - y_i'' \quad \text{dimana } y_i' \text{ dan } y_i'' \geq 0$$

3. Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan yang pada mulanya maksimasi dapat diubah jadi minimasi dengan mengalikan ruas kiri dan ruas kanan dengan negatif.

Contoh :

maksimumkan $Z = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3$

sama artinya dengan,

minimumkan $(Z = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3) \times (-1)$

$$-Z = -5X_1 - 2X_2 - 3X_3$$

Contoh

- ▶ Kasus diambil berdasarkan kasus perusahaan kaca WYNDOR GLASS .

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } z = 3 X_1 + 5 X_2$$

Pembatas :

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

- ▶ Maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

1. Konversikan formulasi matematik awal ke bentuk standar Simpleks

Formulasi matematik awal :

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

Fungsi Pembatas :

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Formulasi Bentuk Standar Simpleks:

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

atau

$$Z - 3 X_1 - 5 X_2 = 0$$

Fungsi Pembatas :

$$X_1 + S_1 = 4$$

$$2X_2 + S_2 = 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + S_3 = 18$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

- ▶ 2. Nilai-nilai dalam bentuk standar dimasukkan ke dalam tabel simpleks

Formulasi Bentuk Standar Simpleks :

Pers.

$$\begin{array}{rcll} (0) & Z - 3 X_1 - 5 X_2 & & = 0 \\ (1) & & X_1 & + S_1 = 4 \\ (2) & & & 2X_2 + S_2 = 12 \\ (3) & 3 X_1 + 2 X_2 & & + S_3 = 18 \end{array}$$

Jika berada pada pusat koordinat (0,0), maka nilai $X_1 = 0$ dan $X_2 = 0$, sedangkan nilai $S_1 = 4$, $S_2 = 12$, dan $S_3 = 18$.

Maka dalam hal ini, X_1 dan X_2 disebut variabel non-basis karena bernilai nol. Sedangkan S_1 , S_2 , dan S_3 disebut variabel basis karena bernilai positif.

Formulasi Bentuk Standar Simpleks:

Pers.

$$\begin{array}{rcl}
 (0) & Z - 3X_1 - 5X_2 & = 0 \\
 (1) & X_1 + S_1 & = 4 \\
 (2) & 2X_2 + S_2 & = 12 \\
 (3) & 3X_1 + 2X_2 + S_3 & = 18
 \end{array}$$

Tabel Simpleks :

Iterasi 0		VARIABEL NON-BASIS		VARIABEL BASIS			RIGHT HAND SIDE
BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	1	0	1	0	0	4
S ₂	0	0	2	0	1	0	12
S ₃	0	3	2	0	0	1	18

3. Tentukan Entering Variable (EV)

Memilih **variabel non-basis** yang akan memasuki variabel basis dengan cara :

- F. Tujuan maksimasi → pilih variabel non-basis yang mempunyai nilai negatif terbesar (nilai paling kecil)
- F. Tujuan minimasi → pilih variabel non-basis yang mempunyai nilai positif terbesar (nilai paling besar)

Iterasi 0

ENTERING VARIABLE

VARIABEL NON BASIS

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	1	0	1	0	0	4
S ₂	0	0	2	0	1	0	12
S ₃	0	3	2	0	0	1	18

4. Tentukan Leaving Variable (LV)

Memilih rasio yang mempunyai nilai **positif terkecil** yang akan meninggalkan variabel basis.

$$\text{Rasio} = \text{Solusi (RHS)} / \text{EV}$$

Titik temu dari LV dengan EV disebut “Elemen Poros”

ITERASI 0

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	1	0	1	0	0	4
S ₂	0	0	2	0	1	0	12
S ₃	0	3	2	0	0	1	18

RASIO

$$4/0 = \#$$

$$12/2 = 6$$

$$18/2 = 9$$

LEAVING
VARIABLE

ELEMEN
POROS

5. Hitung nilai pada baris LV (baris kunci)

Menghitung persamaan elemen poros baru dengan cara :

$$\text{Pers. El. Poros} = \text{Pers. El. Poros Lama} / \text{El. Poros}$$

Iterasi 0

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z							
S ₁							
S ₂							
S ₃							

ENTERING
VARIABLE

LEAVING
VARIABLE

5. Hitung nilai pada baris LV (baris kunci)

Menghitung persamaan elemen poros baru dengan cara :

$$\text{Pers. El. Poros} = \text{Pers. El. Poros Lama} / \text{El. Poros}$$

Iterasi 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z							
S ₁							
X ₂							
S ₃							

5. Hitung nilai pada baris LV (baris kunci)

Menghitung persamaan elemen poros baru dengan cara :

$$\text{Pers. El. Poros} = \text{Pers. El. Poros Lama} / \text{El. Poros}$$

Iterasi 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z							
S ₁							
X ₂	0/2 = 0	0/2 = 0	2/2 = 1				
S ₃							

5. Hitung nilai pada baris LV (baris kunci)

Menghitung persamaan elemen poros baru dengan cara :

$$\text{Pers. El. Poros} = \text{Pers. El. Poros Lama} / \text{El. Poros}$$

Iterasi 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z							
S ₁							
X ₂	0	0	1	0	1/2	0	6
S ₃							

6. Hitung nilai baris baru selain baris LV (baris kunci)

Menentukan persamaan baris baru selain persamaan elemen poros, dengan cara :

$$\text{Pers. Baru} = \text{Pers. Lama} - (\text{El. Kolom Entering}) \times (\text{Pers. El. Poros Baru})$$

Iterasi 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	0				
S_1							
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6
S_3							

$$1 - (-5 \times 0)$$

$$-3 - (-5 \times 0)$$

$$-5 - (-5 \times 1)$$

6. Hitung nilai baris baru selain baris LV (baris kunci)

Menentukan persamaan baris baru selain persamaan elemen poros, dengan cara :

$$\text{Pers. Baru} = \text{Pers. Lama} - (\text{El. Kolom Entering}) \times (\text{Pers. El. Poros Baru})$$

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30
S_1	0	1	0	1	0	0	4
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6
S_3	0	3	0	0	-1	1	6

7. Ulangi langkah 3 s/d 7, sampai tidak ada variabel non-basis yang bertanda :

- F. Tujuan maksimasi → bertanda negatif (-)
- F. Tujuan minimasi → bertanda positif (+)

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)	
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30	RASIO
S_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1 = 4
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6	6/0 = #
S_3	0	3	0	0	-1	1	6	6/3 = 2

ENTERING VARIABLE

LEAVING VARIABLE

ELEMEN POROS

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2

Karena variabel non-basis ≥ 0 semua, maka diperoleh nilai optimal :

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 6$$

$$Z = 36 \times \$1000 = \$ 36000$$

Penyelesaian PL

- ▶ Jika semua persamaan fungsi pembatas bertanda \leq , maka diselesaikan dengan metode simpleks biasa
- ▶ Jika satu/lebih persamaan fungsi pembatas bertanda \geq atau $=$, maka diselesaikan dengan metoda Big M atau metoda Dua Phasa

Contoh Dengan Simpleks Biasa

F. Tujuan : $\min \quad Z = 2X_1 - 3X_2$

F. Pembatas :

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 - X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Konversi ke dalam bentuk standar/kanonik

F. Tujuan : $\min \quad Z = 2X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$

$$\mathbf{Z - 2X_1 + 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0}$$

F. Pembatas :

$$X_1 + X_2 + S_1 = 4$$

$$X_1 - X_2 + S_2 = 6$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	SOLUSI
Z	1	-2	3	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	4
S ₂	0	1	-1	0	1	6

EV

RASIO

4

-6

LV

ELEMEN
POROS

ITERASI 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	SOLUSI
Z	1	-5	0	-3	0	-12
X ₂	0	1	1	1	0	4
S ₂	0	2	0	1	1	10

Solusi Optimal :

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 4$$

$$Z = -12$$

Kasus–Kasus Khusus

1. Degenerasi

- Persoalan ini timbul jika variabel basis mempunyai nilai nol (0) atau ruas kanan mempunyai nilai nol (0)
- Pada kasus ini kemungkinan muncul 2 hal :
 1. Pemilihan LV kembali ke langkah awal dan nilai yang dihasilkan oleh variabel keputusan & fungsi tujuan adalah sama → terjadi *loop/cycling*
 2. Degenerasi temporer ; pada ruas kanan mengandung nilai nol (0) tetapi hasil yang diperoleh pada langkah berikutnya akan menghilangkan nilai nol sehingga variabel keputusan mungkin akan berubah nilainya dan nilai fungsi tujuan akan sama dengan langkah sebelumnya
- Bila pada variabel non-basis yang telah berharga nol (0) kemudian pada iterasi berikutnya, kembali bernilai negatif (-). Maka optimalnya yang diambil adalah yang sebelumnya (untuk kasus maksimasi)

Contoh Degenerasi

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 9X_2$

F. Pembatas :

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Konversi ke dalam bentuk standar/kanonik

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 9X_2 + 0S_1 + 0S_2$
 $Z - 3X_1 - 9X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$

F. Pembatas :

$$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	-3	-9	0	0	0
S_1	0	1	4	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
X_2	0	$1/4$	1	$1/4$	0	2
S_2	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	0	0	$3/2$	$3/2$	18
X_2	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	2
X_1	0	1	0	2	2	0

Karena variabel basis $X_1 = 0$, maka nilai optimal :

$$X_1 = \dots$$

$$X_2 = \dots$$

$$Z = \dots$$

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	0	0	$3/2$	$3/2$	18
X_2	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	2
X_1	0	1	0	2	2	0

Karena variabel basis $X_1 = 0$, maka nilai optimal :

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 2$$

$$Z = 18$$

Contoh Degenerasi Temporer

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 2X_2$

F. Pembatas :

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$4X_1 - X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Konversi ke dalam bentuk standar/kanonik

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$$\mathbf{Z - 3X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0}$$

F. Pembatas :

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 12$$

$$4X_1 + X_2 + S_2 = 8$$

$$4X_1 - X_2 + S_3 = 8$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
S_1	0	4	3	1	0	0	12
S_2	0	4	1	0	1	0	8
S_3	0	4	-1	0	0	1	8

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	$-5/4$	0	$3/4$	0	6
S_1	0	0	2	1	1	0	4
X_1	0	1	$1/4$	0	$1/4$	0	2
S_3	0	0	-2	0	-1	1	0

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	$5/8$	$1/8$	0	$17/2$
X_2	0	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	2
X_1	0	1	0	$-1/8$	$3/8$	0	$3/2$
S_3	0	0	0	1	-2	1	4

Nilai optimal :

$$X_1 = \dots$$

$$X_2 = \dots$$

$$Z = \dots$$

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	$5/8$	$1/8$	0	$17/2$
X_2	0	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	2
X_1	0	1	0	$-1/8$	$3/8$	0	$3/2$
S_3	0	0	0	1	-2	1	4

Nilai optimal :

$$X_1 = 3/2$$

$$X_2 = 2$$

$$Z = 17/2$$

2. Solusi Optimum Banyak

Pada kasus ini tidak ada permasalahan pada pemilihan EV dan LV, tetapi nilai optimal yang dihasilkan pada langkah terakhir “sama” dengan nilai variabel keputusan yang berbeda

Contoh :

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	0	-3	30
X_1	0	1	1/3	3
S_2	0	0	2	2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	30
X_1	0	1
X_2	0	5

3. **Solusi Tak Terbatas**

- Pada kasus ini terdapat ruang solusi yang tidak terbatas sehingga fungsi tujuan dapat meningkat (untuk maksimasi) atau menurun (untuk minimasi) secara tidak terbatas.
- Biasanya nilai yang dimiliki oleh elemen yang ada di bawah EV bernilai satu atau nol.

4. **Tidak Ada Solusi Optimal (Pseudo Optimal)**

- Tidak memiliki solusi optimal. Meskipun ada, solusi optimalnya bernilai semu
- Pada kasus ini ditunjukkan dengan adanya nilai pada fungsi tujuan yang mengandung M (nilai pinalti/variabel artifisial R)

Latihan Soal

PT Unilever bermaksud membuat 2 jenis sabun, yakni sabun bubuk dan sabun batang. Untuk itu dibutuhkan 2 macam zat kimia, yakni A dan B. Jumlah zat kimia yang tersedia adalah $A = 250$ kg dan $B = 400$ kg. Untuk membuat 1 kg sabun bubuk diperlukan 3 kg A dan 8 kg B. Untuk membuat 1 kg sabun batang diperlukan 8 kg A dan 6 kg B. Bila keuntungan yang akan diperoleh setiap membuat 1 kg sabun bubuk = \$5 sedangkan setiap 1 kg sabun batang = \$3, berapa kg jumlah sabun bubuk dan sabun batang yang sebaiknya dibuat?