1. **Pertemuan 9**

Analisis Sensitivitas

1. Perubahan pada konstanta ruas kanan fungsi pembatas

Analisa sensitivitas dilakukan untuk mengurangi perhitungan-perhitungan dan menghindari perhitungan ulang, bila terjadi perubahan-perubahan satu atau beberapa koefisien model LP pada saat penyelesaian optimal telah dicapai.

Pada dasarnya perubahan-perubahan yang mungkin terjadi setelah dicapainya penyelesaian optimal terdiri dari beberapa macam, yakni :

1. Keterbatasan kapasitas sumber, yaitu nilai kanan fungsi-fungsi batasan.
2. Koefisien-koefisien fungsi tujuan.
3. Koefisien-koefisien teknis fungsi-fungsi batasan, yaitu koefisien-koefisien yang menunjukkan beberapa bagian kapasitas sumber yang di “konsumsi” oleh satu satuan kegiatan.
4. Penambahan variabel-variabel baru.
5. Penambahan batasan baru.

Secara umum, perubahan-perubahan tersebut di atas akan mengakibatkan salah satu diantaranya :

1. Penyelesaian optimal tidak berubah, artinya baik variabel-variabel dasar maupun Nilai-nilainya tidak mengalami perubahan.
2. Variabel-variabel dasar mengalami perubahan, tetapi nilai-nilainya tidak berubah .
3. Penyelesaian optimal sama sekali berubah.

Sebelum menjelaskan lebih lanjut setiap macam perubahan- perubahan “post-optimal” beserta seluruh konsekuensinya, terlebih dulu perlu diuraikan beberapa “kaidah primal-dual” yang nantinya akan bermanfaat dalam mempermudah pemahaman analisa sensitivitas ini.

*Primal   Dual*Maksimumkan : Z = 3X1 + 5X2

Minimumkan : Y0 = 8Y1+ 15Y2 + 30Y3

Perubahan Konstanta Ruas Kanan (Kapasitas Sumber Daya) Pengaruh perubahan konstanta ruas kanan terhadap tabel optimal dapat ditentukan dengan menyelidiki perubahan konstanta ruas kanan yang baru pada tabel optimal. Atau dirumuskan sebagai :

𝐛 𝐢= Bˉ¹ bi

Bˉ¹ = matriks dibawah variabel basis awal pada tabel optimal 𝑏 𝑖= menunjukkan nilai baru atau nilai pada tabel optimal Syarat tabel optimal tetap optimal dan layak jika : 𝑏 𝑖 ≥ 0

1. Perubahan pada matirks pembatas

**Kemungkinan-kemungkinan perubahan pada saat tahap optimal telah tercapai :**

1. *Perubahan nilai kanan fungsi batasan*

Hal ini menunjukkan adanya pengetatan ataupun pelonggaran batasan tersebut. Makin besar nilai kanan suatu fungsi batasan berarti makin longgar, sebaliknya makin ketat batasan tersebut bila nilai kanan fungsi batasan diperkecil.

Misalnya pada perusahaan sepatu ideal, kapasitas mesin 2 (yakni mesin yang dipakai untuk membuat sol dari kulit) diperbesar atau ditambah dari 15 menjadi 16, sehingga secara keseluruhan, nilai kanan fungsi-fungsi batasan berubah dari :

menjadi

Apabila terjadi demikian maka pengaruhnya terhadap optimal solution dan laba total dapat kita lihat berikut,

Kembali ke kaidah II maka akan diperoleh

 =

Ternyata X1 berubah dari 5/6 menjadi 5/9, sedangkan X2 berubah dari 5 menjadi 5 1/3. Artinya karena mesin-mesin yang khusus dipakai untuk barang I2 diperbesar kapasitasnya, sedangkan mesin 3 yang dipakai bersana oleh barang I1 dan I2 tetap, maka jelas jumlah barang I1 akan ***berkurang***. Meskipun demikian, laba total yang diperoleh akan bertambah sebagai berikut :

3 (5/9) + 5(16/3) = 28 1/3

Selanjutnya andaikan perusahaan ini makin bernafsu untuk menambah kapasitas mesin 2 menjadi 20. Sehingga nilai kanan fungsi-fungsi pembatas akan berubah dari :

menjadi

Kembali ke kaidah II

 =

Ternyata apabila kapasitas mesin 2 dinaiikkan menjadi 20, maka X1 menjadi “*infeasible”* (< 0) yang tentu saja melanggar batasan non negatif.

1. *Perubahan pada Koefisien-koefisien Fungsi Tujuan*

Perubahan ini menunjukkan adanya perubahan kontribusi masing-masing produk terhadap tujuan, yang mempengaruhikoefisien baris tujuan dan juga optimaly permasalahan tersebut.

Pada contoh perusahaan sepatu ideal, andaikan kontribusi laba per unit barang I1berubah menjadi 4 dan I2 berubah menjadi 6. Pengaruhnya pada koefisien baris pertama atau baris tujuan adalah sbb

 =

Perubahan kontribusi laba per unit menyebabkan laba total berubah menjadi :

4 (5/6) + 6 (5) = 33 1/3

Disini tidak terjadi perubahan kombinasi X1 dan X2 yang optimal, karena batasan yang membentuk kombinasi tersebut tidak mengalami perubahan sama sekali.

1. *Perubahan pada Koefisien-koefisien Teknis*

Perubahan ini akan mempengaruhi sisi kiri dari fungsi-fungsi batasan pada dual problem, sehingga akan mempengaruhi penyelesaian optimal masalah yang bersangkutan.

Contoh :

Sebuah perusahaan yang memproduksi mainan anak-anak akan membuat bingkisan natal. Setiap macam bingkisan akan berisi kombinasi : mainan, alat olah raga dan buku. Untuk itu dibuat bingkisan : standard, de luxe dan super de luxe. Jenis pertama berisi 4 mainan, 4 alat olahraga dan 2 buku, dengan harga jual Rp. 30.000,- perbungkus. Jenis kedua berisi 5 mainan, 6 alat olahraga dan 5 buku, dengan harga jual Rp. 40.000,- perbungkus.Jenis ketiga berisi 6 mainan, 8 alat olahraga dan 5 buku, dengan harga jual Rp. 60.000,- perbungkus. Untuk keperluan ini tersedia 60000 mainan, 75000 alat olahraga, dan 45000 buku. Berapa masing-masing jenis bungkusan harus diprodusir agar diperoleh penerimaan yang maksimal ?

Penyelesaian  :

Misal : X1 = jumlah jenis standar yang diprodusir

X2 = jumlah jenis de luxe yang diprodusir

X3 = jumlah jenis super de luxe yang diprodusir

Primal

Fungsi tujuan : maksimumkan Z = 30X1 + 40X2 + 60X3

Fungsi-fungsi batasan:

1. Mainan : 4X1 + 5X2 + 6X3 ≤ 60000
2. Alat olah raga : 4X1 + 6X2 + 8X3 ≤ 75000
3. Buku : 2X1 + 5X2 + 5X3 ≤ 45000
4. X1, X2, X3, ≥ 0

Tabel Simplek pertama

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 | 1  0  0  0 | -30  4  4  2 | -40  5  6  5 | -60  6  8  5 | 0  1  0  0 | 0  0  1  0 | 0  0  0  1 | 0  60000  75000  45000 |

Tabel simplek kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 | 1  0  0  0 | 6  6/5  4/5  2/5 | 20  -1  -2  1 | 0  0  0  1 | 0  1  0  0 | 0  0  1  0 | 12  -6/5  -8/5  1/5 | 540000  6000  3000  9000 |

Tabel simplek ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 | 1  0  0  0 | 0  0  1  0 | 5  2  -5/2  2 | 0  0  0  0 | 0  1  0  0 | 0  -3/2  5/2  -1/2 | 30/4  -6/5  -2  1 | 562050  1500  3750  7500 |

Jadi kombinasi optimal :

X1 = jumlah jenis standar = 3750

X2 = jumlah jenis de luxe = 0

X3 = jumlah jenis super de luxe = 7500

Penerimaan penjualan = Rp. 562.500.000,-

Dual

Minimumkan : Z = 60000Y1 + 75000Y2 + 45000Y3

Fungsi – fungsi batasan :

1. 4Y1 + 4Y2 + 2Y3 ≥ 30
2. 5Y1 + 6Y2 + 5Y3 ≥ 40
3. 6Y1 + 8Y2 + 5Y3 ≥ 60
4. Y1, Y2, Y3≥ 0

Pada tabel simplek ketiga tampak bahwa X2 bukan variabel yang optimal. Nilai X2 pada baris Z adalah 5, yang apabila dihubungkan dengan batasan dual yang menyangkut X2 adalah :

5(0) + 6(30/4) + 5(0) – 40 = 5

Dimana :

1. 0, 30/4, dan 0 adalah nilai-nilai X4, X5, dan X6 pada baris Z
2. 40 adalah nilai kanan dari fungsi batasan (dual) kedua

Andaikan setelah dicapainya tahap optimal terjadi perubahan pada koefisien teknis X2 dari :

 menjadi  maka

Maka fungsi batasan (dual) kedua berubah menjadi :

3Y1 + 4Y2 + 6Y3 ≥ 40

Akibatnya, nilai X2 pada baris Z (pada tabel optimal) akan berubah menjadi :

3(0) + 4(30/40) + 6(0) – 40 = -10

Sehingga perubahan pada tabel optimal adalah :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 |  |  |  | -10  4 1/5  17  4 |  |  |  |  |

Dimana nilai X3 pada baris-baris X4, X1, dan X3 diperoleh dengan menggunakan kaidah ketiga yang telah diuraikan dimuka :

 =

Dengan perubahan X3 tabel diatas tidak optimal lagi, karena ada nilai negatif pada baris tujuannnya (=-10). Akibatnya perlu dilanjutkan sampai tahap optimal tercapai.

1. *Penambahan Variabel Baru*

Dalam hal ini dapat dipergunakan anggapan bahwa variabel tambahan tersebut sudah “ada”, dengan koefisien nol. Akibatnya penambahan variabel tersebut baru akan mempengaruhi penyelesaian optimal apabila memperbarui baris tujuan optimal.

Misalkan ditambah variabel baru Xa dimana :

Koefisien Xapada fungsi tujuan adalah 20

Koefisien Xapada pembatas pertama adalah 4

Koefisien Xapada pembatas kedua adalah 5

Koefisien Xapada pembatas ketiga adalah 3

Sehingga fungsi pembatas dual yang menyangkut Xa adalah

4Y1 + 5Y2+ 3Y3 ≥ 20

Nilai dual optimal : Y1 = 0, Y2= 30/4, Y3= 0, ternyata memenuhi fungsi batasan dual diatas, sehingga penambahan Xa tidak mempengaruhi penyelesaian optimal, karena nilai koefisien-koefisien baris tujuan tetap positif semua.

Apabila koefisien Xapada fungsi tujuan sebesar 40 misalnya, sehingga fungsi batasan dual menjadi

4Y1 + 5Y2+ 3Y3 ≥ 40

Maka fungsi batasan tersebut dilanggar. Karena 4(0) + 5(30/4) + 3(0) adalah kurang dari 40.

Dengan menggunakan kaidah-kaidah dimuka, nilai-nilai pada kolom Xaadalah sebagai berikut :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 |  |  |  | -1 ½  1/10  1/4  1/2 |  |  |  |  |

Karena salah satu variabel Z masih negatif maka tabel tidak optimal dan masih perlu dilanjutkan lagi sampai menemukan tabel optimal.

1. *Penambahan batasan baru*

Penambahan batasan baru akan mempengaruhi penyelesaian optimal apabila batasan tersebiut aktif, artinya belum cukup oleh batsan-batasan telah ada. Langkah pertama pada penyelesaian hal ini adalah memeriksa apakah batasan baru tersebut dipenuhi oleh jawaban optimal. Bila ternyata jawaban optimal memenuhi batasan baru maka tidak perlu diperhatikan. Bila tidak maka batasan baru harus dimasukkan dalam masalah.

Pada contoh akhir penyelesaian optimal adalah X1 = 3750, X2= 0, X3 = 7500. Apabila ditambahkan batasan baru :

5 X1 + 3X2 + 7X3  75000

Maka jawaban optimal tidak berubah karena

5(3750) + 3(0) + 7(7500) = 71250 yang tentu saja lebih kecil dari 75000.

Tetapi batasan baru tersebut menjadi

5 X1 + 3X2 + 7X3  65000

Maka perlu diolah lebih lanjut karena jawaban optimal tidak memenuhi syarat lagi.

Caranya adalah ,meletakkan batasan baru pada tabel optimal :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 | 1  0  0  0 | 0  0  1  0 | 5  2  -5/2  2 | 0  0  0  0 | 0  1  0  0 | 0  -3/2  5/2  -1/2 | 30/4  -6/5  -2  1 | 0  0  0  0 | 562050  1500  3750  7500 |
| X7 | 0 | 5 | 3 | 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 65000 |

Tabel diatas perlu modifikasi karena X1 dan X3 adalah variabel-variabel dasar, maka nilai koefisien-koefisien X1 dan X3 pada baris X7 harus nol. Hal ini dapat dihitung dengan menambahkan (-5) x persamaan X1 + (-7) x persamaan X3 pada persamaan X7 sehingga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Dasar | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 | Nilai Kanan |
| Z  X4  X5  X6 | 1  0  0  0 | 0  0  1  0 | 5  2  -5/2  2 | 0  0  0  0 | 0  1  0  0 | 30/4  -3/2  5/2  -1/2 | 0  -6/5  -2  1 | 0  0  0  0 | 562050  1500  3750  7500 |
| X7 | 0 | 0 | 3/2 | 7 | 0 | 11/2 | 0 | 1 | 65000 |

Meskipun baris Z menunjukkan syarat optimal, tetapi nilai kanan menunjukkan tidak fesiable, sehingga masih perlu dilanjutkan hingga tabel optimal diperoleh.

1. Latihan Soal
2. Dalam kasus Reddy Mikks
3. Tentukan range untuk rasio keuntungan unit cat exterior terhadap keuntungan unit cat interior.
4. Jika perhasilan per ton cat interior tetap Rp 5000 per ton, tentukan penghasilan unit cat interior maksmal yang akan menjaga solusi optimal yang ada tidak berubah.
5. Jika untuk alasan pemasaran keuntungan unit cat interior harus dikurangi menjadi Rp 3000, akankah produksi optimal saat ini berubah ?
6. Sebuah perusahaan memproduksi dua produk, A dan B. Penghasilan unit adalah $2 dan $3. Dua bahan baku M1 dan M2 digunakan dalam pembuatan dua produk, dimana kapasitas hariannya adalah masing-masing 8 dan 18 unit. Satu unit produk A menggunakan 2 unit M1 dan 2 unit M2, sedangkan satu unit B menggunakan 3 unit M1 dan 6 unit M2
7. Tentukan harga rangkap M1 dan M2 dang rentang kelayakannya.
8. Andaikan bahwa 4 tambahan unit pada M1 bisa diperoleh pada tambahan biaya 30 sen per unit. Apakah anda akan menyarankan biaya penambahan ini ?
9. Jika kapasitas M2 ditingkatkan 5 unit, tentukan penghasilan optimalnya !
10. Wild West memproduksi dua jenis topi koboy. Jenis topi 1 membutuhkan waktu pengerjaan 2 kali dibanding topi 2. Jika semua waktu pengerjaan dialokasikan pada topi 2 saja, perusahaan dapat memproduksi total 400 jenis topi 2 sehari. Batas permintaan pasar untuk dua jenis topi adalah 150 dan 200 topi per hari. Penghasilannya adalah $8 per jenis topi 1 dan $5 per jenis topi 2.
11. Gunakan metode grafik untuk menentukan jumlah topi setiap jenis yang memaksimalkan penghasilan.
12. Tentukan harga rankap dari kapasitas produksi (untuk tipe 2) dan range yang bisa diterapkan.
13. Jika batas permintaan harian pada jenis 1 harus diturunkan menjadi 120, gunakan harga rangkap untuk menentukan pengaruh terkait pada penghasilan optimal.
14. Sebuah perusahaan memproduksi 3 produk : A, B, dan C. Volume penjualan produk A paling sedikit 50% dari total penjualan semua produk. Perusahaan tidak dapat menjual lebih dari 75 unit produk A per hari. Tiga produk tersebut menggunakan satu bahan baku, dimana kapasitas maksimal harian adalah 240 lb. Laju penggunaan bahan baku adalah 2 lb per unit A, 4 lb per unit B, dan 3 lb per unit C. Harga tiap unit A, B dan C masing-masing adalah $20, $50, dan $35.
15. Tentukan produksi optimal produk perusahaan tersebut.
16. Tentukan harga rangkap sumber daya bahan baku dan range yang diperbolehkan. Jika bahan baku yang tersedia ditingkatkan menjadi 120 lb, tentukan solusi optimal dan perubahan dalam total pendapatan menggunakan harga rangkap.
17. Gunakan harga rangkap untuk menentukan pengaruh perubahan kebutuhan maksimal untuk produk A tiap ± 10 unit.