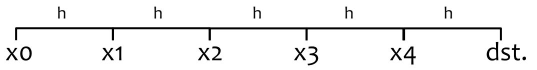
Lembar kerja Pertemuan ke-11
Interpolasi Newton Gregory

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan syarat penggunaan Newton Gregory
2. Mahasiswa dapat menjelaskan keterkaitan antara interpolasi Newton dengan Newton Gregory
3. Mahasiswa dapat menghitung tabel selisih maju dan tabel selisih mundur
4. Mahasiswa dapat menggunakan metode Newton Gregory Maju dan Newton Gregory Mundur untuk melakukan interpolasi
5. Mahasiswa dapat menghitung taksiran galat dari metode Lagrange, Newton dan Newton Gregory

Ilustrasi



Khusus untuk nilai *x* yang memiliki jarak yang sama bisa digunakan metode Newton Gregory. Ada 2 jenis metode Newton Gregory Maju dan Newton Gregory Mundur.

Dinotasikan $f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, \ldots.$

A. Newton Gregory Maju

Didefinisikan selisih maju sbb $\Delta f_0 = f_1 - f_0$, $\Delta f_1 = f_2 - f_1$, $\Delta f_2 =$ ____________, $\Delta f_7 =$ ____________

Jika $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$ maka $\Delta^2 f_1 =$ _______________, dan $\Delta^3 f_0 =$ ______________________,.

Akan dipelajari hubungan antara selisih terbagi dengan selisih maju. Diketahui bahwa $x_1 - x_0 = h, x_2 - x_1 = h,$ $x_3 - x_2 = h$, dst. maka

1. $f[x_1, x_0] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f_1 - f_0}{h} = \dfrac{\Delta f_0}{1!\,h}$

2. $f[x_2, x_1, x_0] = \dfrac{\rule{4cm}{0.4pt}}{x_2 - x_0}$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \rule{2cm}{0.4pt}}{\rule{5cm}{0.4pt}}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f_1}{h} - \rule{1cm}{0.4pt}}{2h} = \frac{\dfrac{\Delta^2 f_0}{1h}}{2h}$$

$$= \frac{\rule{2cm}{0.4pt}}{1.h.2.h} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}$$

3. Tunjukkan bahwa : $f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \dfrac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3}$

4. Sehingga

$f[x_4, x_3, \ldots, x_0] =$ __________________

$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] =$ __________________

Dari polinom Newton diperoleh:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Sama dengan $p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\dfrac{\Delta f_0}{1!\,h} + (x - x_0)(x - x_1)\dfrac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2} + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\dfrac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$

Jika $x_1 = x_0 + 1.h$ dan $x_2 = x_0 + 2.h$ maka nilai *x* adalah nilai yang akan diinterpolasikan maka *x* dapat dituliskan menjadi $x = x_0 + s.h$, $s \in R$ maka diperoleh bahwa $\frac{x - x_0}{h}$ =s , $\frac{x - x_1}{h}$ =s-1, dan $\frac{x - x_2}{h}$ =s-2 sehingga

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0 \text{ atau}$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0 \quad \text{Polinom Newton Gregory Maju}$$

B. **Penerapan Newton Gregory Maju**

Dengan menggunakan kasus yang sama yaitu menghitung nilai f(2.2) akan digunakan metode Newton Gregory Maju. Lengkapi tabel berikut

x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1.5	0.04979			
2	0.01832			
2.5	0.00673			
3	0.00248			

- Gunakan polinom Newton Gregory Maju berderajat 2 untuk menghitung nilai f(2.2), pilih $x_0 = 1.5, x_1 = 2$ dan $x_2 = 2.5$ (dalam 6 desimal)

C. **Polinom Newton Gregory Mundur**

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{s}{1!}\nabla f_0 + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+(n-1))}{n!}\nabla^n f_0$$

Tabel Selisih Mundur

x_i	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_{-3}	f_{-3}			
x_{-2}	f_{-2}	∇f_{-2}		
x_{-1}	f_{-1}	∇f_{-1}	$\nabla^2 f_{-1}$	
x_0	f_0	∇f_0	$\nabla^2 f_0$	$\nabla^3 f_0$

Dimana : $f_0 = f(x_0), f_{-1} = f(x_{-1}), \nabla f_0 = f_0 - f_{-1}, \nabla f_{-1} =$ ______________, $\nabla^2 f_0 = \nabla f_0 - \nabla f_{-1}$ maka untuk

$\nabla^2 f_{-1} =$ ______________ dan $\nabla^{k+1} f_i =$ ___________________

D. **Penerapan Newton Gregory Mundur**

Dengan menggunakan kasus yang sama yaitu menghitung nilai f(2.2) akan digunakan metode Newton Gregory Mundur. Lengkapi tabel berikut

x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1.5	0.04979			
2	0.01832			
2.5	0.00673			
3	0.00248			

- Gunakan polinom Newton Gregory Mundur berderajat 2 untuk menghitung nilai f(2.2), pilih $x_0 = 2.5, x_{-1} = 2$ dan $x_{-2} = 1.5$ (dalam 6 desimal)

- Gunakan polinom Newton Gregory Maju berderajat 1 untuk menghitung nilai f(2.2), pilih $x_0 = 2, x_1 = 2.5$ (dalam 6 desimal)

E. **Taksiran Galat Interpolasi Newton dan Newton Gregory**

Selain menggunakan galat eksak ataupun galat relatif hampiran, dalam Interpolasi Newton dan Interpolasi Newton Gregory dapat digunakan taksiran galat untuk memperkirakan besarnya galat yang mungkin terjadi. Taksiran galat dapat dihitung jika terdapat titik tambahan x_{n+1}.

Interpolasi	Taksiran Galat
Newton	$E(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) f[x_{n+1}, x_n, \ldots, x_1]$
Newton Gregory Maju	$E(x) = s(s-1) \ldots (s-n) \frac{\Delta^{n+1} f_0}{(n+1)!}$ $s = (x - x_0)/h$

- Hitunglah taksiran galat untuk polinom Newton berderajat 2 untuk titik $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2$ dan $x_2 = 2.5$ kasus diatas

- Hitunglah taksiran galat untuk polinom Newton Gregory Maju berderajat 2 untuk titik $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2$ dan $x_2 = 2.5$ kasus diatas