# Teori Sistem dan Dasar Sinyal

Yeffry Handoko Putra

ЌП PERCETAKAN TALITHA KHOUM
2006

Teori Sistem dan Dasar Sinyal

Dipublikasi oleh
Percetakan Talitha Khoum
Bandung
http://www.talithakhoum.com


Dipublikasi oleh Percetakan Talitha Khoum

Diproduksi di Bandung

# Tentang Penulis

**Yeffry Handoko Putra** mendapatkan gelar Sarjana Teknik pada tahun 1996 dari Departemen Teknik Fisika Institut Teknologi Bandung dengan predikat sangat memuaskan. Pada tahun 1999 mendapatkan gelar Magister Teknik dari Program Studi Magister Instrumentasi dan Kontrol, Institut Teknologi Bandung dengan predikat Cum-Laude. Bidang kajian yang ditekuni saat ini adalah Sensor dan Pengontrolan Cerdas. Saat ini penulis sedang melanjutkan program doktoral di Institut Teknologi Bandung dengan bidang kajian pengontrolan robot dalam air. Penulis banyak terlibat dalam beberapa seminar nasional dan internasional serta menjadi anggota beberapa himpunan keanggotaan profesi seperti Ikatan Alumni Teknik Fisika, Himpunan Fisika Indonesia dan Persatuan Insinyur Indonesia. Beberapa penelitian yang intensif dilaksanakan adalah penelitian mengenai robot ikan,  robot beroda dan robot perahu. Buku lain yang telah dipublikasikan : Pengelolaan Instalasi Komputer (UNIKOM, 2005), Sistem Operasi (UNIKOM, 2005). Saat ini penulis adalah dosen tetap di Jurusan Teknik Komputer, Universitas Komputer Indonesia, Bandung. Penulis dapat dihubungi melalui email: yeffry@unikom.ac.id

# Daftar Pustaka

**Bab I : Sistem**

| | |
|---|---|
| 1.1. Pengenalan Sistem | 1 |
| 1.2. Sinyal-sinyal Elementer | 1 |
| 1.3. Sistem Elementer | 7 |
| 1.3.1. Elemen Statik | 7 |
| 1.3.2. Elemen Dinamik | 9 |
| 1.3.3. Elemen Arithmatik | 13 |
| 1.4. Diagram Blok | 14 |
| 1.4.1. Koneksi Seri (Cascade atau Tandem) | 14 |
| 1.4.2. Koneksi Paralel | 15 |
| 1.4.3. Koneksi Umpan Balik | 15 |

**Bab II : Sistem Linier Stasioner**

| | |
|---|---|
| 2.1. Sistem Linier | 18 |
| 2.2. Sistem Stasioner | 19 |
| 2.3. Sistem Linier Stasioner | 21 |
| 2.4. Integral Konvolusi | 22 |
| 2.4.1. Interprestasi Grafik untuk Konvolusi | 24 |
| 2.5. Respon Step | 26 |
| 2.6. Sifat-sifat Respon Impuls Dalam Diagram Blok | 26 |
| 2.7. Sistem Dinyatakan dengan Persamaan Differensial | 27 |

**Bab III : Respon Sinusoidal**

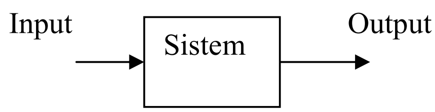
| | |
|---|---|
| 3.1. Bentuk Amplituda-Fasa Untuk Sinyal Sinusoida | 29 |
| 3.2. Bentuk Eksponensial | 29 |
| 3.3. Fungsi Transfer untuk Sistem Linier | 30 |
| 3.4. Gain dan Phase Shift | 31 |
| 3.5. Sinyal Konstan | 32 |
| 3.6. Sistem Dinyatakan sebagai Persamaan Differensial | 33 |
| 3.7. Reduksi Diagram Blok | 36 |

| | |
|---|---|
| **Bab IV : Analisis Domain Frekuensi** | 39 |
| 4.1. Amplituda dan Fasa | 39 |
| 4.2. Spekstrum Kompleks | 40 |
| 4.3. Analisis Domain Frekuensi untuk Sistem Linier Stasioner | 42 |
| 4.4. Filter | 44 |
| 4.5. Translasi Spektrum dan Modulasi | 46 |

# Bab I
# Sistem

### 1.1. Pengenalan Sistem

Sistem merupakan susunan dari elemen-elemen yang berkoordinasi membentuk suatu fungsi. Cara penggambaran system biasanya dengan menggunakan diagram blok.

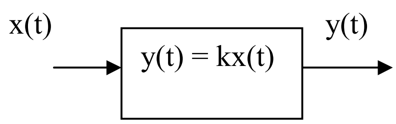



Gambar 1.1. Diagram blok sistem

Sinyal adalah kuantitas fisik yang dapat diukur dan bervariasi (berubah) terhadap waktu. Contoh : x(t) adalah besaran x yang merupakan fungsi waktu t

Input : sinyal penyebab (eksitasi)
Output : sinyal akibat (respon)

Misal : Sistem audio amplifier

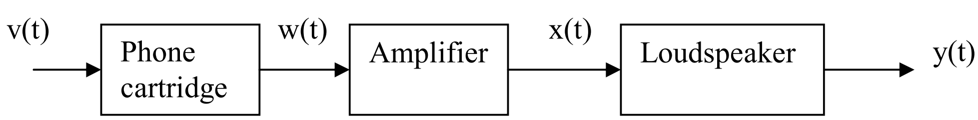



Gambar 1.2. Sistem audio amplifier

x(t) = input berupa tegangan listrik pada terminal suara
y(t) = output berupa arus listrik pada loudspeaker

hubungan input dan input dinyatakan dengan persamaan matematis y(t) = kx(t)
dengan k = gain

Analisa sistem adalah penguraian sistem menjadi beberapa komponen, misal pada sistem audio amplifier :




Gambar 1.3. Sistem Audio Amplifier yang diuraikan (*breakdown*)

Contoh sistem :
(a) Rangkaian RLC
(b) Dinamika pesawat terbang dan kendaraan
(c) Algoritma untuk menganalisa faktor finansial dalam menentukan harga batas
(d) Algoritma pendeteksi lekukan (edge detection) dalam pencitraan

### 1.2. Sinyal-sinyal Elementer

Sinyal-sinyal elementer biasanya digunakan sebagai sinyal uji dari kinerja suatu sistem. Sinyal-sinyal elementer ini berupa : step, pulsa kotak (rectangular pulse), impulse, sinusoida, pulsa eksponensial.

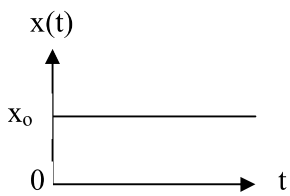
A. Step

Fungsi unit step :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$


Gambar 1.4. Fungsi unit step

Sinyal step dinyatakan dengan $x(t) = x_0u(t)$ ; $x_0$ = amplituda dari step

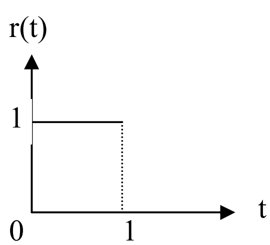



Gambar 1.5. Sinyal step

B. Pulsa kotak (Rectangular Pulse)

Fungsi rectangular pulse dinyatakan dengan

$$r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{t lainnya} \end{cases}$$



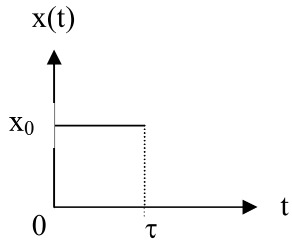

Gambar 1.6. Fungsi Pulsa Kotak

Pulsa rectangular dinyatakan dengan

$$x(t) = x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$x_0$ = amplituda pulsa (satuannya sama dengan x(t))

$\tau$ = durasi pulsa (satuannya waktu)



Gambar 1.7. Sinyal pulsa kotak

C. Impluse (fungsi delta / dirac delta)

Fungsi delta dinyatakan dengan :

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

dengan u(t) adalah fungsi unit step

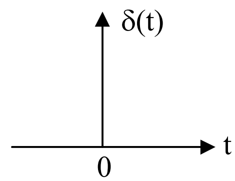
Dua sifat penting fungsi delta :

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

dan

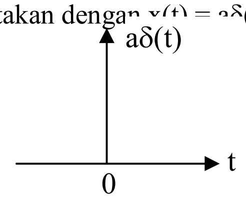
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Fungsi delta adalah fungsi kejut (spike) yang lebarnya sangat pendek dan amplitudanya tak hingga. Misal di kehidupan sehari-hari adalah petir



Gambar 1.8. Fungsi delta atau impulse

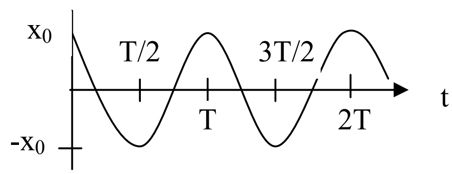
Impulse x(t) dinyatakan dengan $x(t) = a\delta(t)$



Gambar 1.9 Sinyal impulse

Beberapa sinyal impulse yang berderet untuk waktu yang berbeda akan membentuk sinyal diskrit.

D. Sinusoida




Gambar 1.10. Sinyal sinusoida

Sinyal sinusoida dinyatakan dengan

$$x(t) = x_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$x_0$ = amplituda puncak (peak amplituda) sinus
T = perioda

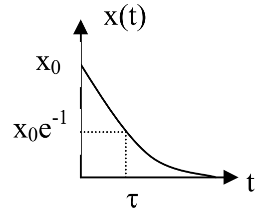
Atau

$$x(t) = x_0 \cos 2\pi ft$$
$$= x_0 \cos\omega t$$

E. Pulsa Eksponensial

Pulsa eksponensial dinyatakan dengan

$$x(t) = x_0\, e^{-t/\tau}\, u(t)$$




Gambar 1.11. Pulsa eksponensial

$x_0$ = amplituda awal pulsa pada $t = 0^+$
$\tau$ = Konstanta waktu

Dalam setiap jarak $n\tau$ amplituda pulsa eksponensial berkurang dengan factor pengali $e^{-n}$ :

$$x(t + n\tau) = e^{-n}\, x(t)$$

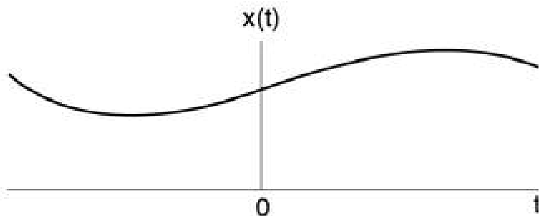
Misal untuk n = 3 dan $t = 0^+$

$$x(3\tau) = x(0^+ + 3\tau) = e^{-3}\, x(0^+) \approx 0{,}05\, x_0$$

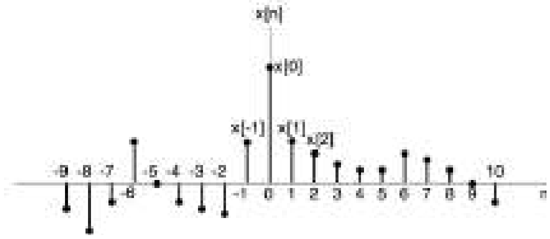
Amplituda pulsa drop sebesar 5% dari amplituda awal

**1.2.1. Sinyal kontinu dan sinyal Diskrit**

Sinyal berdasarkan variabelnya bisa berupa sinyal 1 dimensi (1D), 2 dimensi (3D), bahkan bisa n dimensi. Khusus untuk sinyal 1 dimensi dengan variabel bebas yang disebut waktu dikenal dua jenis sinyal yaitu sinyal kontinu dan diskrit. Sinyal kontinu adalah sinyal yang ada setiap saat nilainya atau dengan pewaktuan yang kontinu (selalu ada) dan ditulis dengan bentuk x(t) yang berarti variabel x merupakan fungsi waktu kontinu. Sedangkan sinyal diskrit adalah sinyal yang tidak ada setiap saat, nilainya hanya ada pada waktu kelipatan waktu sampling yang ditulis x[kT] atau x[nT] atau x[n]. Variabel k atau n bernilai integer sedangkan variabel T adalah waktu sampling yang terkadang jarang dituliskan. Pada gambar di bawah ini diperlihatkan gambar sinyal kontinu dan diskrit



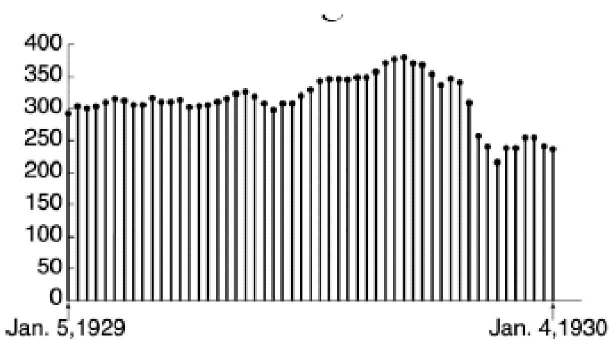

(a)




(b)

Gambar 1.12. (a) Sinyal kontinu x(t) dan (b) sinyal diskrit x[n]

Contoh sinyal kontinu sangat mudah ditemui di alam ini seperti tegangan listrik, arus listrik, tekanan, temperatur, kecepatan dan banyak lagi. Sedangkan contoh sinyal diskrit bisa berupa sinyal kontinu yang disampling, urutan DNA manusia, populasi untuk spesies tertentu. Pada gambar 1.13. diperlihatkan contoh data diskrit yang dibuat oleh manusia



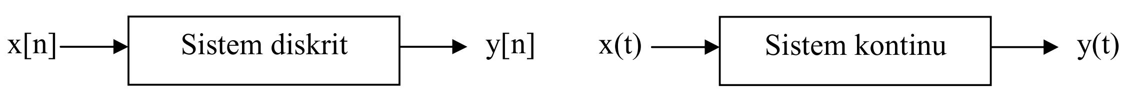

(a)

Courtesy of Jason Oppenheim.
Used with permission.

(b)

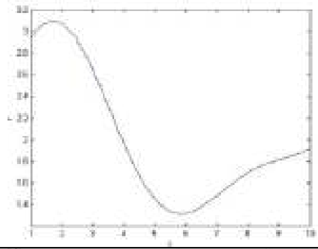
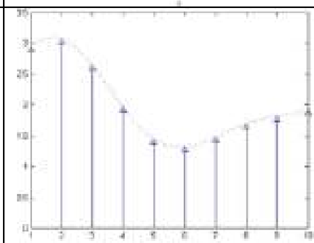
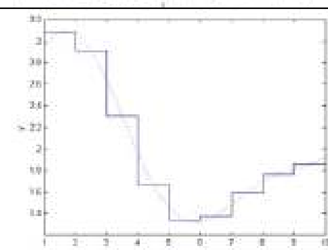
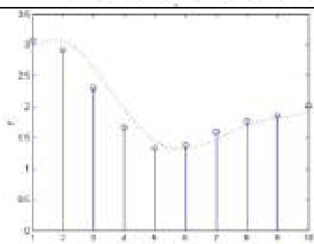
Gambar 1.13 Data diskrit buatan manusia: (a) data tahunan jumlah produksi barang (b) gambar digital

Sinyal diskrit dianggap penting di era ini karena dapat diproses dengan komputer digital modern dan prosesor pemrosesan digital (Digital Signal Processor). Ditinjau dari sisi sistem, suatu sistem yang bersifat kontinu maka masukan dan keluarannya adalah kontinu demikian juga untuk sistem diskrit maka masukan dan keluarannya adalah diskrit. Suatu sistem yang mengubah dari sistem kontinu menjadi sistem diskrit adalah sistem sampling yaitu sistem yang mencacah data kontinu untuk suatu perioda pewaktuan diskrit. Pada gambar 1.14 ini digambarkan diagram blok dari kedua sistem secara sederhana.




Gambar 1.14. Diagram blok sistem diskrit dan kontinu

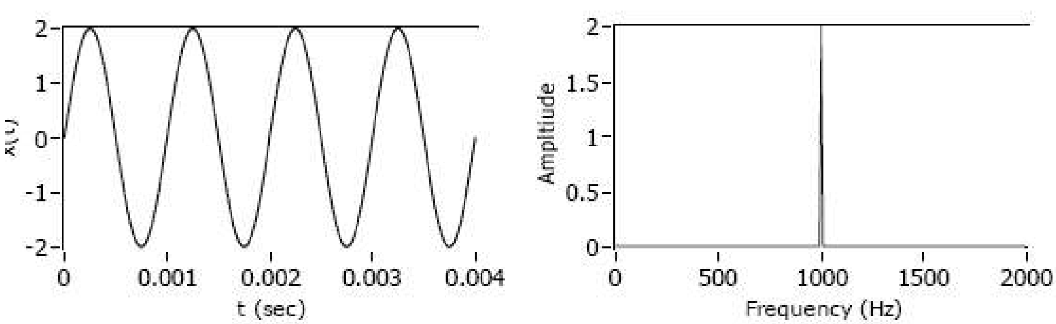
Berdasarkan nilai dan responnya terhadap waktu sinyal dapat dibedakan menjadi 4 jenis

| | |
|---|---|
| Waktu kontinu, nilai kontinu<br>• Didefinisikan untuk setiap saat dan amplitudanya bervariasi secara kontinu dan bisa berapa saja. Contoh :<br>- sinyal dari transduser<br>- sinyal analog |  |
| Waktu diskrit, nilai kontinu<br>• Didefinisikan untuk waktu diskrit dan amplitudanya kontinu bisa berapa saja |  |
| Waktu kontinu, nilai diskrit<br>• Didefinisikan untuk saat tertentu amplitudanya diskrit. Contoh sinyal hasil sampling |  |
| Waktu diskrit, nilai diskrit<br>• Didefinisikan untuk waktu diskrit nilai amplitudanya diskrit |  |

Gambar 1.15.Jenis-jenis sinyal berdasarkan pewaktuan dan nilainya.

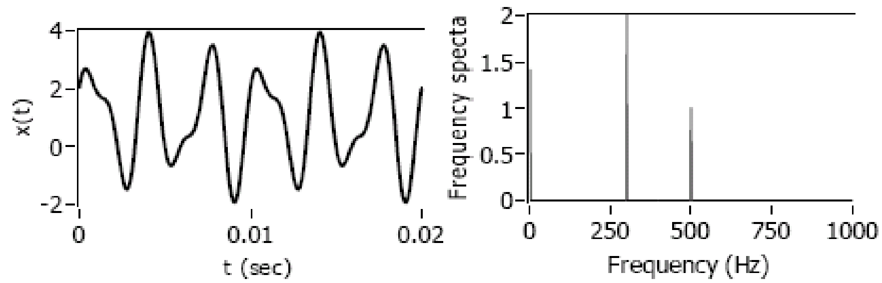
Sekali lagi waktu diskrit berarti waktunya berdasarkan kelipatan terhadap perioda sampling sedangkan nilai diskrit adalah nlai yang terbatas pada hasil kuantisasi bit

Dalam teori mengenai sinyal, suatu sinyal dapat direpresentasikan terhadap domain waktu juga dalam domain frekuensi. Kedua domain ini biasanya merupakan absis dalam suatu koordinat. Suatu sinyal sinyal sinus dengan frekuensi tunggal dalam bentuk domain waktu dan frekuensi digambarkan sebagai berikut




Gambar 1.16. (a) Sinyal dalam domain waktu (b) sinyal dalam domain frekuensi

Dalam domain waktu sinyal digambarkan sebagai perubahan amplituda terhadap perubahan waktu, sinyal ini disebut sebagai respon waktu. Sedangkan dalam domain frekuensi sinyal yang sama dinyatakan sebagai amplituda untuk frekuensi yang dimiliki oleh sinyal. Dalam hal ini hanya ada satu frekuensi saja sehingga representasinya berupa sinyal impulse. Sedangkan untuk sinus dengan dua frekuensi digambarkan sebagai berikut :




Gambar 1.17. (a) Sinyal dalam domain waktu (b) sinyal dalam domain frekuensi

### 1.3. Sistem Elementer

Sistem elementer dinyatakan dengan hubungan input-output yang sederhana

y(t) = operasi pada x(t)

Relasi ini disebut karakteristik transfer.

Sistem Elementer dibagi menjadi

1. Elemen Statik
2. Elemen Dinamik
3. Elemen Arithmatik

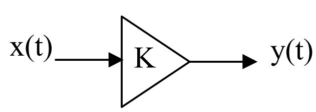
Elemen statik jika output hanya bergantung pada input saat yang sama
Elemen dinamik jika salah satu output bergantung pada input dari waktu sebelumnya
Elemen arithmatik : penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian

#### 1.3.1. Elemen Statik

Salah satu elemen statik adalah elemen proporsional yang dinyatakan dengan

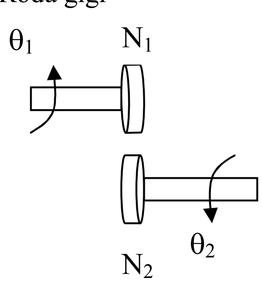
y(t) = kx(t)

Output pada waktu t bergantung pada nilai input pada t yang sama. Dengan diagram blok dapat digambarkan :




Gambar 1.18. Elemen Statik

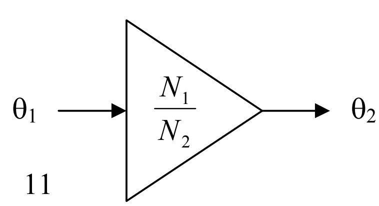
Contoh : Roda gigi




Hubungan perpindahan angular roda gigi

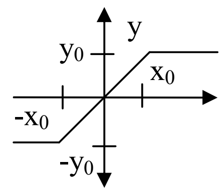
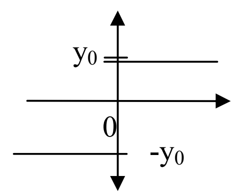
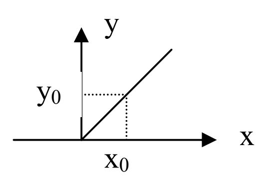
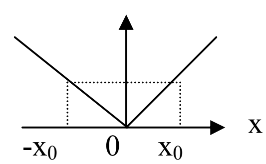
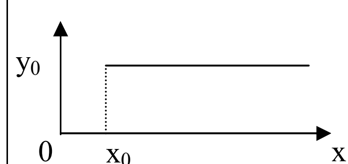
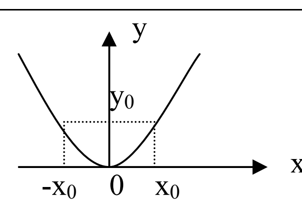
$$\theta_2 = \frac{N_1}{N_2}\theta_1$$

Dapat dinyatakan dengan diagram blok



Beberapa jenis elemen statik lainnya :

Tabel 1.1. Jenis-jenis sistem elementer dengan fungsi waktunya

| **Nama** | **Deskripsi** | **Grafik** |
|---|---|---|
| Soft Limiter | $y = \begin{cases} -y_0 & x < -x_0 \\ y_0 \dfrac{x}{x_0} & \lvert x \rvert \le x_0 \\ y_0 & x > x_0 \end{cases}$ |  |
| Hard Limiter | $y = \begin{cases} -y_0 & \mathrm{x} < 0 \\ 0 & \mathrm{x} = 0 \\ y_0 & \mathrm{x} > 0 \end{cases}$ |  |
| Half-wave Rectifier | $y = \begin{cases} 0 & \mathrm{x} \le 0 \\ y_0 \dfrac{x}{x_0} & \mathrm{x} > 0 \end{cases}$ |  |
| Full-wave Rectifier | $y = y_0 \left\lvert \dfrac{x}{x_0} \right\rvert$ |  |
| Comparator | $y = \begin{cases} 0 & \mathrm{x} \le \mathrm{x}_0 \\ y_0 & \mathrm{x} > 0 \end{cases}$ |  |
| Square-Law Rectifier | $y = y_0 \left( \dfrac{x}{x_0} \right)^2$ |  |

### 1.3.2. Elemen Dinamik

A. Elemen Tunda (delay element)

Adalah elemen dinamik dengan bentuk karakteristik transfer :

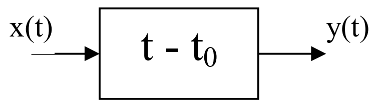
$$y(t) = x(t - t_0)$$

dengan

$t_0$ = waktu tunda (delay time) $\neq 0$

Input dan output satuannya sama

Simbolnya :




Gambar 1.19 Simbol elemen tunda

Contoh : Tentukan output y(t) bila input $x(t) = x_0\, e^{-t/\tau}\, u(t)$

Jawab :

$$y(t) = x_0 e^{-(t-t_0)/\tau} u(t-t_0)$$

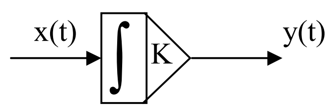
Elemen delay sangat berguna dalam banyak sistem missal radar dan sonar yang memanfaatkan propagation delay

B. Elemen Integral

Adalah elemen dinamik dengan bentuk karakteristik transfer :

$$y(t) = K\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

Simbol integrator :




Gambar 1.20. Simbol elemen integral

Contoh:

Tentukan output dari integrator di atas bila inputnya :

a) Sinyal step : $x(t)=x_0u(t)$

b) Pulsa eksponensial : $x(t) = x_0e^{-t/\tau}u(t)$

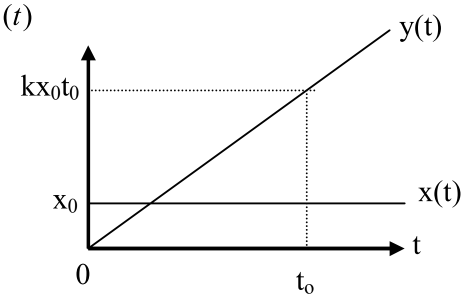
Jawab:

a) $y(t) = k\int_{-\infty}^{t} x_0 u(t)dt$

Karena unit step bernilai 0 untuk $t \leq 0$ maka $y(t)=0$ untuk $t \leq 0$ sehingga

$$y(t) = k\int_{0}^{t} x_0 dt = kx_0 t \qquad ;\ t > 0$$

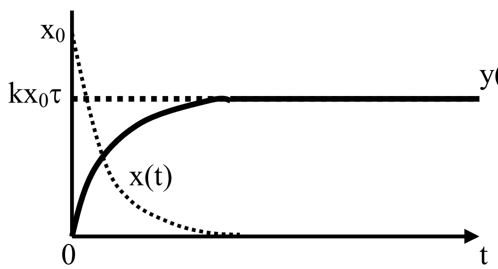
$$= kx_0 t u(t)$$



b) $y(t) = k\int_{-\infty}^{t} x_0 e^{-t/\tau} u(t)dt$

Karena unit step bernilai 0 untuk t ≤ 0 maka y(t)=0 untuk t ≤ 0 sehingga

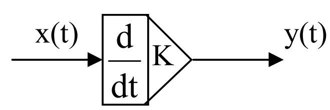
$$y(t) = k\int_{0}^{t} x_0 e^{-t/\tau} dt$$
$$= kx_0\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^t = kx_0\left(-\tau e^{-t/\tau} + \tau\right)$$
$$= kx_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad ; t > 0$$
$$= kx_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)u(t)$$




C. Elemen Differensiator

Bentuk karakteristik transfernya : $y(t) = k\dfrac{dx(t)}{dt}$

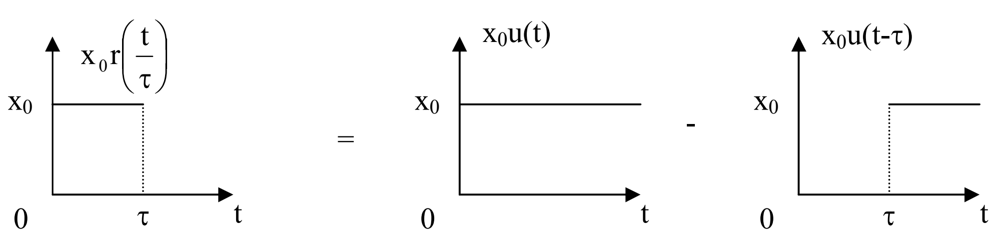
Simbol differensiator :




Gambar 1.21. Simbol elemen differensiator

Contoh : Tentukan Output differensiator untuk input $x(t) = x_0 r\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$

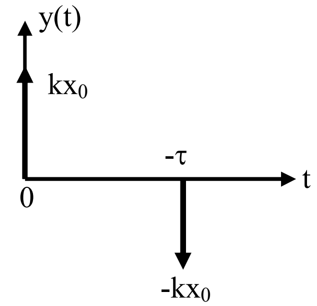
Jawab :
Pulsa rectangular (kotak) x(t) dapat dinyatakan sebagai selisih dua sinyal step




$$x(t) = x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right) = x_0\left[u(t) - u(t-\tau)\right]$$

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt} = k\frac{d}{dt}\left[x_0 u(t) - x_0 u(t-\tau)\right]$$

$$= kx_0\left[\delta(t) - \delta(t-\tau)\right]$$




Contoh :

Carilah output dari differensiator untuk input : $x(t)=x_0e^{-t/\tau}u(t)$

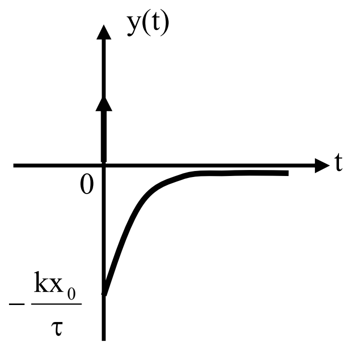
Jawab :

$$y(t) = kx_0\frac{d}{dt}\left[e^{-t/\tau}u(t)\right] = kx_0\left[e^{-t/\tau}\frac{du(t)}{dt} + \frac{de^{-t/\tau}}{dt}u(t)\right]$$

$$= kx_0 = \left[e^{-t/\tau}\delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)\right]$$

Karena fungsi delta adalah nol untuk $t \neq 0$, kita dapat mengganti eksponensial dengan $e^0 = 1$ pada pernyataan pertama sehingga :

$$y(t) = kx_0\left[\delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)\right]$$




D. Elemen kompresi

Bentuk karakteristik transfernya :

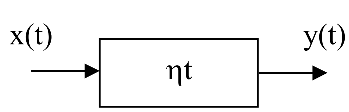
$y(t) = x(\eta t)$

$x(t)$ = input

$y(t)$ = output

$\eta$ = rasio kompresi

Simbol :




Gambar 1.22 Simbol elemen kompresi

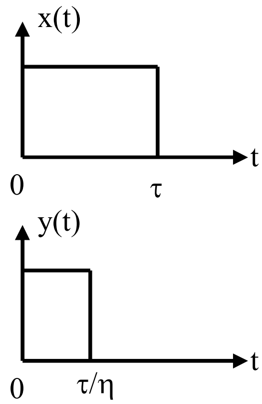
Contoh :

Carilah output dari elemen kompresi untuk input $x(t) = x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)$

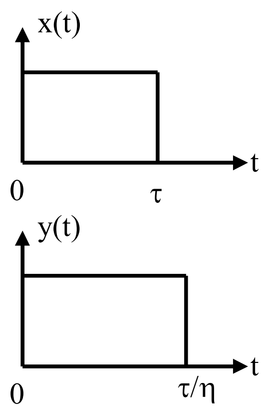
Jawab :

$y(t) = x(\eta t) = x_0 r\left(\frac{\eta t}{\tau}\right) = x_0 r\left(\frac{t}{\tau'}\right)$ bentuknya masih pulsa kotak dengan $\tau' = \frac{\tau}{\eta}$

untuk η>1 terjadi kompresi sehingga durasi y(t) < durasi x(t)

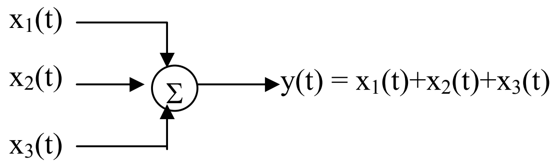



untuk η<1 terjadi ekspansi sehingga durasi y(t) > durasi x(t)



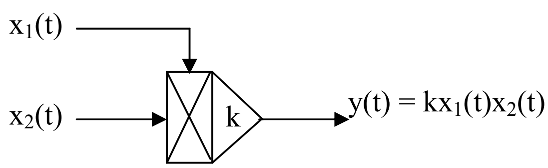
### 1.3.3. Elemen Arithmatik

Elemen arithmatik terdiri dari elemen penjumlahan/pengurangan dan perkalian
Simbol :
Penjumlahan



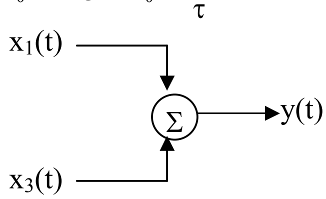

Gambar 1.23. Simbol elemen penjumlahan

Perkalian



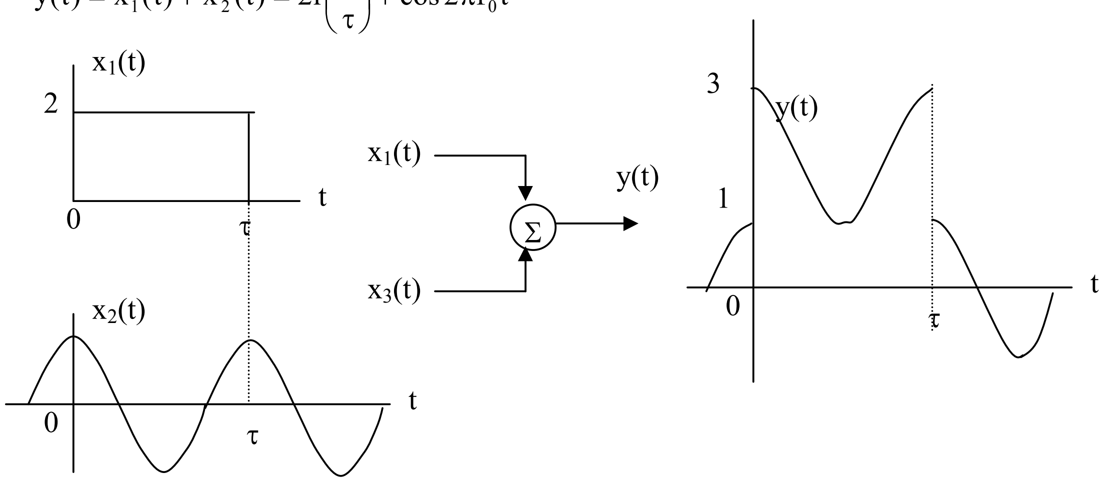

Gambar 1.24. Simbol elemen perkalian

Contoh : Untuk rangkaian berikut gambarkan output y(t) jika $x_1(t) = 2r\left(\frac{t}{\tau}\right)$ dan $x_2(t) = \cos 2\pi f_0 t$ dengan $f_0 = \frac{1}{\tau}$




Jawab :

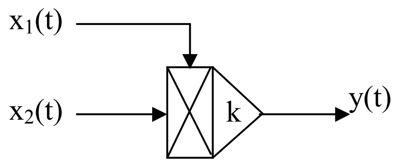
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2r\left(\frac{t}{\tau}\right) + \cos 2\pi f_0 t$$



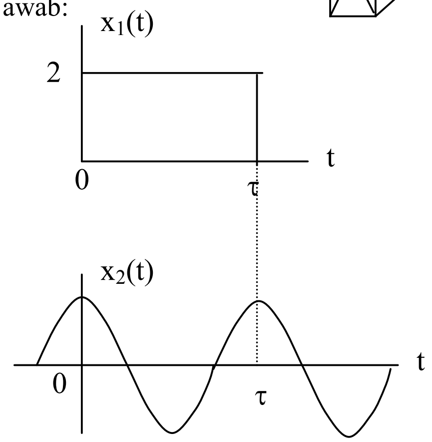
Contoh :

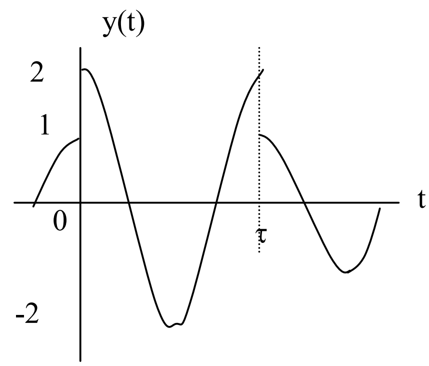
Untuk rangkaian berikut gambarkan output y(t) jika $x_1(t) = 2r\left(\frac{t}{\tau}\right)$ dan

$x_2(t) = \cos 2\pi f_0 t$ dengan $f_0 = \frac{1}{\tau}$




Jawab:



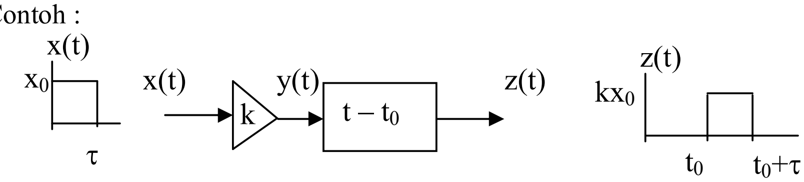




### 1.4. Diagram Blok

Sistem elementer di atas dapat dihubungkan secara seri, parallel atau umpan balik.

#### 1.4.1. Koneksi Seri (Cascade atau tandem)

Contoh :



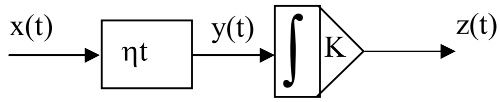

Bila input $x(t) = x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)$

dari gambar $y(t) = kx(t) = kx_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)$

$$z(t) = y(t - t_0) = kx_0 r\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$

Contoh :

Tentukan output z(t) dari sistem berikut bila inputnya $x(t)=x_0 e^{-t/\tau}u(t)$




Jawab:

Output dari elemen kompresi :

$$y(t) = x(\eta t) = x_0 e^{-\eta t/\tau} u(\eta t) = x_0 e^{-t/\tau'} u(t)$$

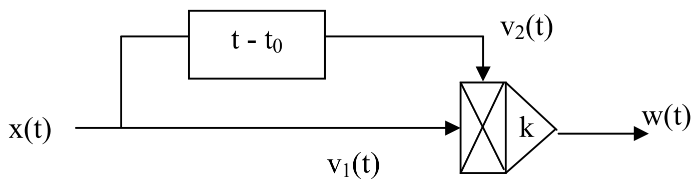
dengan $\tau' = \dfrac{\tau}{\eta}$ dan dari kenyataan $u(\eta t) = u(t)$ untuk $\eta>0$

sedangkan output dari integrator

$$z(t) = k\int_{-\infty}^{t} y(t)dt = kx_0\tau'(1 - e^{-t/\tau'})u(t)$$

### 1.4.2. Koneksi parallel

Contoh :




Tentukan output dari multiplier jika $x(t) = x_0u(t)$

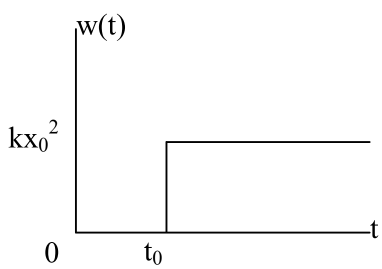
Jawab:

$v_1(t) = x(t) = x_0u(t)$

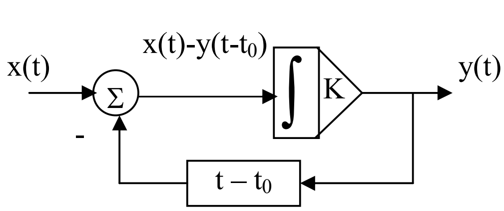
$v_2(t) = x(t - t_0) = x_0u(t - t_0)$

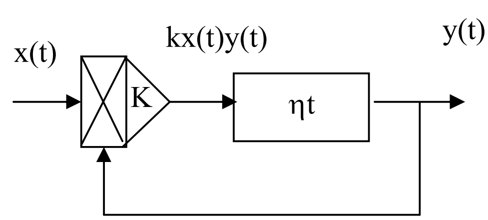
Sehingga outputnya :

$w(t) = kv_1(t)v_2(t) = kx(t)x(t-t_0) = kx_0^2u(t)u(t-t_0)$

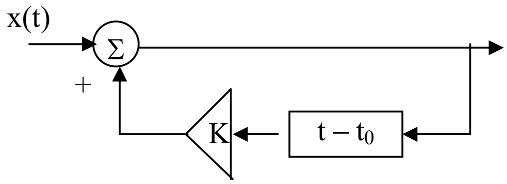



### 1.4.3. Koneksi umpan balik



Contoh : Carilah output y(t) untuk sistem di bawah ini, bila inputnya adalah $x(t) = x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)$ dengan $\tau < t_0$. Asumsikan bahwa y(t)=0 untuk t < 0.




Jawab:

Dari gambar ini diperoleh outputnya adalah : $y(t) = x(t) + ky(t - t_0)$ (*)

Relasi ini mengandung y(t) dan $y(t - t_0)$. Kita akan mencari relasi (karakteristik transfer) dalam bentuk

$$y(t) = \text{operasi pada } x(t)$$

Relasi seperti ini dapat diperoleh dengan mengulang-ulang persamaan output dengan menggangti t dengan $t - t_0$, yang memberikan :

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) + ky(t - 2t_0) \qquad (**)$$

dengan cara yang sama

$$y(t - 2t_0) = x(t - 2t_0) + ky(t - 3t_0) \qquad (***)$$

dan seterusnya. Menggunakan persamaan (**) untuk mengeliminasikan $y(t - t_0)$ dari persamaan (*) diperoleh

$$y(t) = x(t) + kx(t - t_0) + k^2y(t - 2t_0)$$

menggunakan persamaan (***) untuk mengeliminasikan $y(t - 2t_0)$ diperoleh

$$y(t) = x(t) + kx(t - t_0) + k^2x(t - 2t_0) + k^3y(t - 3t_0) + \ldots$$

Jika diteruskan akan diperoleh deret :

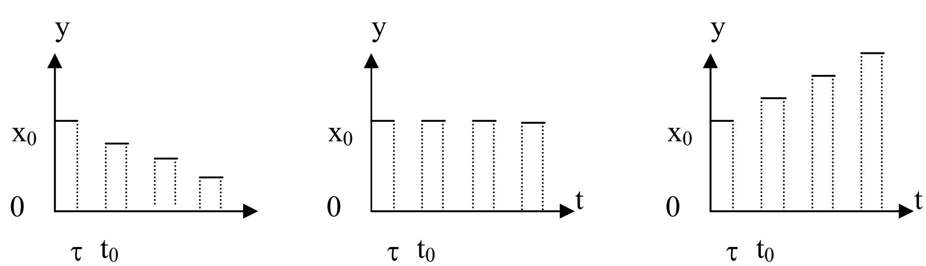
$$y(t) = x(t) + kx(t - t_0) + k^2x(t - 2t_0) + k^3y(t - 3t_0) + \ldots$$

Relasi ini dapat dituliskan secara ringkas :

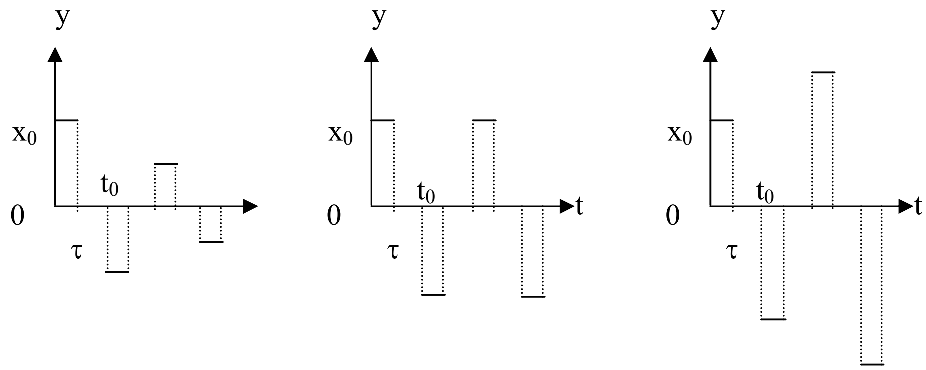
$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n x(t - nt_0)$$

untuk input $x(t) = x_0 r\left[\frac{t}{\tau}\right]$ diperoleh :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n x_0 r\left(\frac{t - nt_0}{\tau}\right)$$



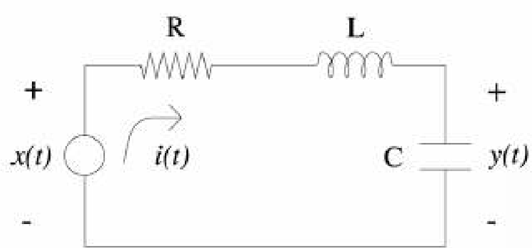

0 < k < 1 k = 1 k > 1




-1 < k < 0 k = -1 k < -1

**1.5. Contoh – contoh sistem**

**(a)** Rangkaian RLC



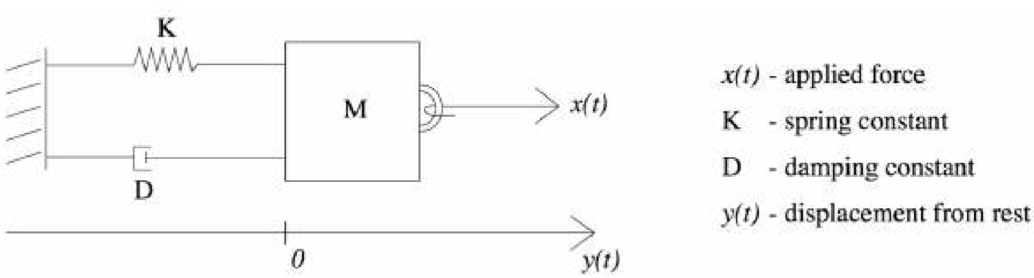

$$\mathrm{R}\ i(t) + \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{LC}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{RC}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

**(b) Sistem Mekanik**



Force Balance:

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - \mathrm{K}y(t) - \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt}$$

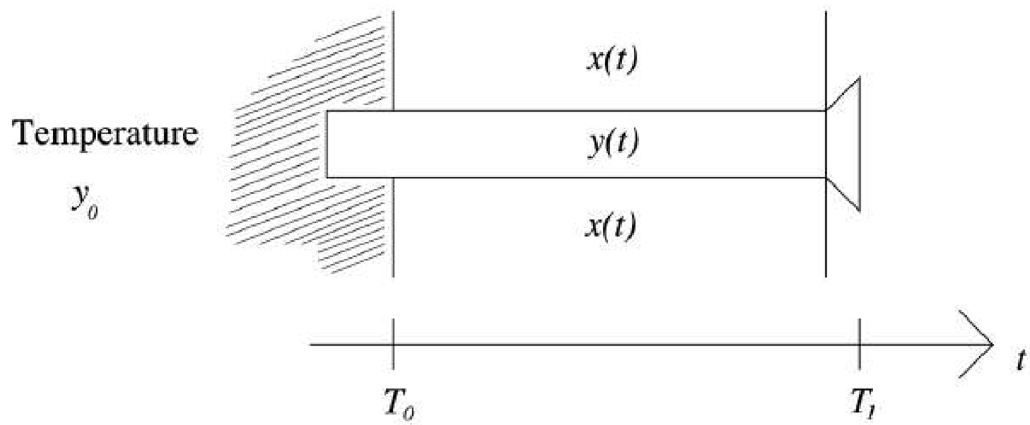
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{K}y(t) = x(t)$$

Beberapa sistem fisik dapat dimodelkan dengan persamaan matematik yang sama

(c) Sistem Termal

Cooling Fin in Steady State




$t$ = distance along rod

$y(t)$ = Fin temperature as function of position

$x(t)$ = Surrounding temperature along the fin

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= k[y(t) - x(t)] \\ y(T_0) &= y_0 \\ \frac{dy}{dt}(T_1) &= 0 \end{aligned}$$

1.6. Sifat-sifat sistem (Kausalitas, Linieritas, bervariasi terhadap waktu)

Beberapa sistem yang berbeda memiliki sifat-sifat yang umum dan sifat-sifat ini menentukan analisis dan sifat-sifat yang lain. Misal sistem linier akan menghasilkan output yang memiliki superposisi untuk rentang input yang luas.

1.6.1. Kausalitas (Causality)

Sebuah sistem bersifat kausal jika output tidak mengantisipasi nilai input yang akan datang. Jadi suatu output yang muncul hanya bergantung terhadap nilai input yang masuk saat itu saja. Semua sistem waktu nyata (realtime) adalah kausal karena waktu yang berjalan maju. Efek muncul setelah akibat. Bayangkan jika suatu terdapat sistem non kausal yang tergantung pada harga saham besok hari. Sifat kausal tidak dimiliki oleh sistem yang bervariasi secara spasial (ruang), perekaman suara.

Secara matematik sistem kausal dapat dinyatakan dengan persamaan berikut :
Sebuah sistem yang memetakan sinyal input ke output ($x(t) \rightarrow y(t)$ ) adalah kausal jika

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$  $x2(t) \rightarrow y_1(t)$

dan

$x_1(t) = x_2(t)$ untuk semua $t \leq t_0$

maka

$y_1(t) = y_2(t)$ untuk semua $t \leq t_0$

**CAUSAL OR NONCAUSAL**

$$y(t) = x^2(t-1)$$

E.g. $y(5)$ depends on $x(4)$ ... causal

$$y(t) = x(t+1)$$

E.g. $y(5) = x(6), y$ depends on future $\Rightarrow$ noncausal

$$y[n] = x[-n]$$

E.g. $y[5] = x[-5]$ ok, but
$y[-5] = x[5], y$ depends on future $\Rightarrow$ noncausal

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

E.g. $y[5]$ depends on $x[4]$ ... causal

1.6.2. Tidak Bergantung Waktu (*time-invariant*)

Suatu sistem tidak bergantung waktu (*time-invariant*) jika sifatnya tidak bergantung pada berapun waktunya. Sistem yang memiliki sifat tidak tergantung waktu sering juga disebut sistem stasioner. Secara matematika diskrit sebuah sistem yang memetakan input ke output ($x[n] \rightarrow y[n]$ ) adalah time-invariant untuk semua input $x[n]$ dan semua pergeseran waktu $n_0$. Jika

$x[n] \rightarrow y[n]$

maka

$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$

Demikian juga untuk sistem dengan waktu kontinu:
Jika

$x(t) \rightarrow y(t)$

maka

$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

**TIME-INVARIANT OR TIME-VARYING ?**

$$y(t) = x^2(t+1)$$

TI

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

Time-varying (NOT time-invariant)

Jika input pada suatu sistem time-invariant adalah periodik maka outputnya adalah juga periodik dengan perioda yang sama dengan input

"Proof": Suppose $x(t+T) = x(t)$

and $x(t) \rightarrow y(t)$

Then by TI

$$\underset{\uparrow}{x(t+T)} \rightarrow \underset{\uparrow}{y(t+T)}.$$

These are the same input!

So these must be the same output, i.e., $y(t) = y(t+T)$

1.6.3. Sistem linier dan non linier

Banyak sistem yang non linier. Misalnya sistem rangkaian dioda, termistor, dinamika pesawat terbang, respon telinga manusia, model ekonometrik. Tetapi umumnya fokus pada analisa sistem pada sistem yang liner saja untuk tingkat strata satu. Mengapa demikian karena beberapa alasan yaitu :

a. Model linier merepresentasikan keakuratan dari beberapa sifat sistem. Misal resistor linier, kapasitor,
b. Mudah mengamati perubahan dari pengaruh sinyal yang kecil disekitar titik kerja
c. Sistem linier mudah untuk ditelusuri, memberikan dasar pengamatan yang mudah dan jelas

Suatu sistem kontinu disebut linier jika memiliki sifat superposisi:
Jika

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \text{ dan } x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

maka

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

# Bab II

# Sistem Linier Stasioner

Sebuah sistem linier stasioner memenuhi superposisi dan memiliki parameter yang konstan tidak berubah terhadap waktu (invariant waktu)

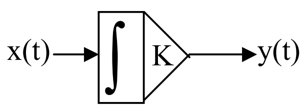
### 2.1. Sistem Linier

Sistem linier adalah sistem yang mengikuti prinsip superposisi :

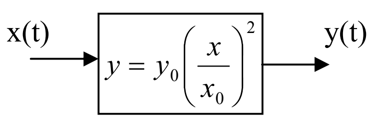
Jika input $x_1(t)$ secara sendirian menghasilkan output $y_1(t)$ dan
Input $x_2(t)$ secara sendirian menghasilkan output $y_2(t)$
maka input $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ menghasilkan output $y(t)=a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

Contoh 2-1: Perlihatkan bahwa sistem berikut linier

a)




b)




Jawab :

a. Output untuk input : $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ adalah

$$y(t) = k\int_{-\infty}^{t}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]dt$$

$$= a_1k\int_{-\infty}^{t}x_1(t)dt + a_2k\int_{-\infty}^{t}x_2(t)dt$$

$$= \quad a_1y_1(t) \quad + \quad a_2y_2(t)$$

dengan $y_1(t)$ adalah output untuk input $x_1(t)$ dan
$y_2(t)$ adalah output untuk input $x_2(t)$
Jadi sistem integrator adalah linier

b. Karakteristik transfer dari sistem :

$$y(t) = y_0\left[\frac{x(t)}{x_0}\right]^2$$

Output untuk input $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ adalah

$$y(t) = y_0\left[\frac{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)}{x_0}\right]^2$$

$$= a_1^2y_0\left[\frac{x_1(t)}{x_0}\right]^2 + a_2^2y_0\left[\frac{x_2(t)}{x_0}\right] + 2a_1a_2y_0\frac{x_1(t)x_2(t)}{x_0^2}$$

Hasil ini tidak memiliki bentuk
$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

dengan

$y_1(t)$ adalah output untuk input $x_1(t)$ dan

$y_2(t)$ adalah output untuk input $x_2(t)$

Jadi sistem ini nonlinier

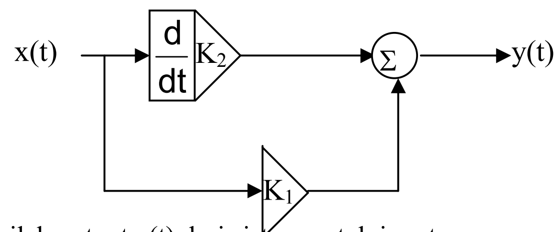
Superposisi dapat diperluas untuk input dengan lebih dari 2 komponen. Misal untuk input : $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \ldots. + a_nx_n(t)$ makan outputnya adalah

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \ldots. + a_ny_n(t)$$

dengan

$y_i(t)$ adalah output untuk input $x_i(t)$ ; $i = 1,2, ..,n$

Contoh :




Carilah output y(t) dari sistem untuk input :

$$x(t) = 5x_0\cos\omega_1(t) + 4x_0\cos\omega_2(t) - 3x_0\cos\omega_3 t$$

Jawab :

Karena sistem linier dapat digunakan superposisi. Input adalah kombinasi linier dari bentuk $x_i(t) = x_0\cos\omega_i t$ untuk i = 1, 2, 3 dengan outputnya :

$$y_i(t) = k_1x_0\cos\omega_i t - k_2\omega_i x_0\sin\omega_i t \text{ ; } i = 1, 2, 3$$

Melalui superposisi outputnya :

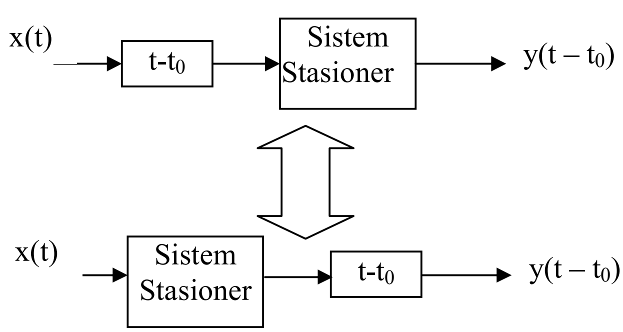
$$\begin{aligned} y(t) &= 5y_1(t) + 4y_2(t) - 3y_3(t) \\ &= 5\,(k_1x_0\cos\omega_1 t - k_2\omega_1x_0\sin\omega_1 t) \\ &\quad + 4\,(k_1x_0\cos\omega_2 t - k_2\omega_2x_0\sin\omega_2 t) \\ &\quad - 3\,(k_1x_0\cos\omega_3 t - k_2\omega_2x_0\sin\omega_3 t) \end{aligned}$$

Setiap sistem yang terdiri dari beberapa sub sistem linier adalah sistem linier. Proporsi, delay, kompresi, integrator, differensiator dan penjumlahan adalah elemen yang berupa sistem linier

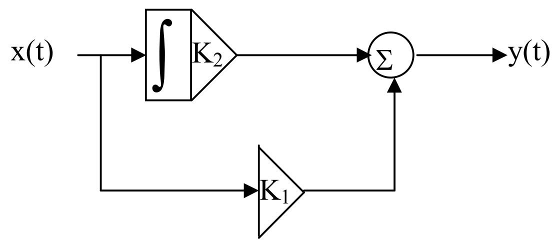
**2.2. Sistem Stasioner**

Sistem stasioner adalah sistem yang mengikuti prinsip invarian waktu :

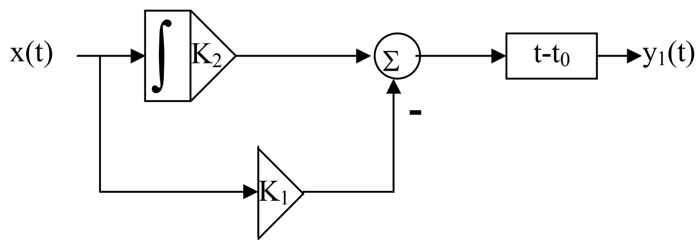
Jika input x(t) menghasilkan output y(t), maka input $x(t-t_0)$ menghasilkan output $y(t-t_0)$

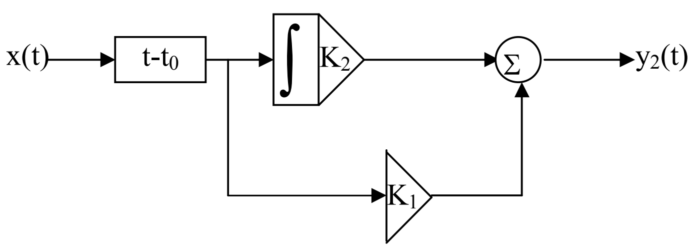


Contoh : Perlihatkan bahwa sistem berikut adalah sistem stasioner




Jawab : untuk memperlihatkan sistem ini linier ditambahkan elemen tunda




Sistem stasioner jika $y_1(t) = y_2(t)$

$$y_1(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t)dt - k_2 x(t - t_0)$$

dan

$$y_2(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t} x(t - t_0)dt - k_2 x(t - t_0)$$

misal $\alpha = t - t_0$ maka

$$y_2(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\alpha)d\alpha - k_2 x(t - t_0)$$

Karena $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ identik maka sistem adalah stasioner

Contoh : Apakah elemen kompresi stasioner?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\eta t} \longrightarrow \boxed{t\text{-}t_0} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{t\text{-}t_0} \longrightarrow \boxed{\eta t} \longrightarrow y(t)$$

Jawab :

$y_1(t) = x[\eta(t - t_0)] = x(\eta t - \eta t_0)$

$y2(t) = x(\eta t\text{-}t_0)$

untuk $\eta \neq 1$, $y_1(t) \neq y_2(t)$ jadi elemen kompresi tidak stasioner

*Latihan :*

Buktikan atau perlihatkan apakah elemen proporsional dengan gain k(t) adalah stasioner

Suatu elemen atau sistem yang terdiri dari sub sistem stasioner adalah stasioner dan sistem tanpa parameter berubah terhadap waktu adalah stasioner

**2.3 Sistem Linier Stasioner**

Sistem Linier Stasioner memenuhi syarat superposisi dan time variance. Output dari sistem linier stasioner untuk input :

$x(t) = a_1x_1(t - t_1) + a_2x_2(t - t_2) + \dots$

adalah

$y(t) = a_1y_1(t - t_1) + a_2y_2(t - t_2) + \dots$

dengan $y_i(t)$ adalah output untuk input $x_i(t)$ ; i = 1, 2, 3, …

Contoh : output dari suatu sistem linier stasioner untuk input $x_1(t) = x_0u(t)$ adalah

$$y_1(t) = y_0e^{-t/\tau_1}u(t)$$

Carilah output untuk input

$$x(t) = 5x_0r\left(\frac{t}{\tau_2}\right)$$

Jawab : input x(t) dapat dinyatakan dengan

$x(t) = 5x_0u(t) - 5x_0u(t\text{-}\tau_2) = 5x_1(t) - 5x_1(t - \tau_2)$

Melalui superposisi dan time invarian outputnya adalah

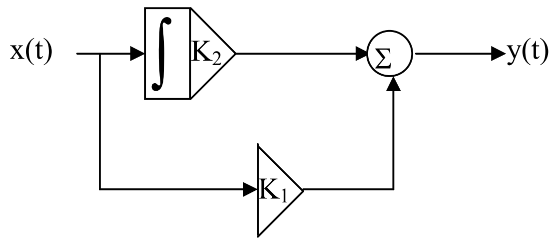
$$\begin{aligned} y(t) &= 5y_1(t) - 5y_1(t - \tau_2) \\ &= 5y_0e^{-t/\tau_1}u(t) - 5y_0e^{-(t-\tau_2)/\tau_1}u(t - \tau_2) \end{aligned}$$

Jadi suatu sistem adalah linier dan stasioner jika mengandung elemen proporsional, delay, integral, diffensial, penjumlahan dan tanpa parameter yang bervariasi terhadap waktu

Contoh :

Carilah output y(t) dari sistem berikut untuk input

$$x(t) = 5x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right) - 2x_0 r\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$




Dari pengamatan diagram blok ini adalah linier dan stasioner jadi dapat digunakan superposisi dan time invariance

Input dapat dinyatakan sebagai

$x(t) = 5x_0u(t) - 5x_0u(t - \tau) - 2x_0u(t - t_0) + 2x_0u(t - t_0 - \tau)$
$\quad = 5x_1(t) - 5x_1(t - \tau) - 2x_1(t - t_0) + 2x_1(t - t_0 - \tau)$

dengan $x_1(t) = x_0u(t)$

Outputnya untuk sistem linier stasioner :

$y(t) = 5y_1(t) - 5y_1(t - \tau) - 2y_1(t - t_0) + 2y_1(t - t_0 - \tau)$

dengan $y_1(t)$ adalah output dari input $x_1(t)$

$$y_1(t) = k_1x_0 \int_{-\infty}^{t} u(t)dt - k_2x_0u(t)$$

$$= k_1x_0tu(t) - k_2x_0u(t) = x_0(k_1t - k_2)u(t)$$

Sehingga

$$y(t) = 5x_0(k_1t - k_2)u(t) - 5x_0[k_1(t - \tau) - k_2]u(t - \tau)$$
$$- 2x_0[k(t - t_0) - k_2]u(t - t_0) + 2x_0[k_1(t - t_0 - \tau) - k_2]u(t - t_0 - \tau)$$

## 2.4. Integral Konvolusi

Respon impuls dari sistem linier stasioner dinyatakan sebagai fungsi h(t) dengan

$y(t) = ah(t)$ adalah output untuk input $x(t) = a\delta(t)$

Untuk input sembarang y(t) dapat diperoleh dengan integral konvolusi :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

Contoh :

Respon Impuls dari sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_0u(t)$

Jawab :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0}{\tau} u(\lambda) e^{-(t-\lambda)/\tau} u(t-\lambda) d\lambda$$

Fungsi u(t-λ) = 1 untuk t - λ > 0 dengan λ > t dan

u(t-λ) = 0 untuk λ lainnya

Maka

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-(t-\lambda)/\tau} u(\lambda) d\lambda$$

Fungsi u(λ) = 1 untuk λ > 0 maka

$$y(t) = \int_{0}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-(t-\lambda)/\tau} d\lambda$$

$$y(t) = \frac{x_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_{0}^{t} e^{\lambda/\tau} d\lambda \qquad ; t > 0$$

$$= x_0 e^{-t/\tau} u(t)(e^{-t/\tau} - 1)$$

$$= x_0 (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

Terkadang lebih mudah mengganti variable integral λ menjadi η = t - λ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta) h(\eta) d\eta$$

Contoh :

Respon Impuls dari suatu sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (\sin \omega t) u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_o u(t)$

Jawab :

Karena input x(t) lebih sederhana dari respon impuls h(t) maka

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 u(t-\eta) \frac{1}{\tau} e^{-\eta/\tau} (\sin \omega\eta) u(\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-\eta/\tau} (\sin \omega\eta) u(\eta) d\eta$$

$$= \frac{x_0}{\tau} \int_{0}^{t} e^{-\eta/\tau} (\sin \omega\eta) d\eta$$

$$= \frac{x_0}{\tau} \left[ \frac{\tau[\omega\tau - e^{-t/\tau}(\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t)]}{1 + (\omega\tau)^2} \right] u(t)$$

Maka outputnya :

$$y(t) = \frac{x_0 [\omega\tau - e^{-t/\tau}(\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t)]}{1 + (\omega\tau)^2} u(t)$$

Contoh :

Respon impuls untuk suatu sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_0 u(t)$

Jawab :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta) h(\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_0 u(t-\eta) \left[ \delta(\eta) - \frac{1}{\tau} e^{-\eta/\tau} u(\eta) \right] d\eta$$

Kita tuliskan sebagai :

$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

dengan

$$y_1(t) = x_0 \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\eta) \delta(\eta) d\eta$$

$$= x_0 \int_{-\infty}^{t} \delta(\eta) d\eta$$

dan

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-\eta/\tau} u(\eta) u(t-\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-\eta/\tau} u(\eta) d\eta$$

$y_1(t) = x_0[u(t) - u(-\infty)] = x_0 u(t)$

$y_2(t) = x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t)$

Output $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

$= x_0 u(t) - x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t) = x_0 e^{-t/\tau} u(t)$

### 2.4.1. Interprestasi Grafik untuk Konvolusi

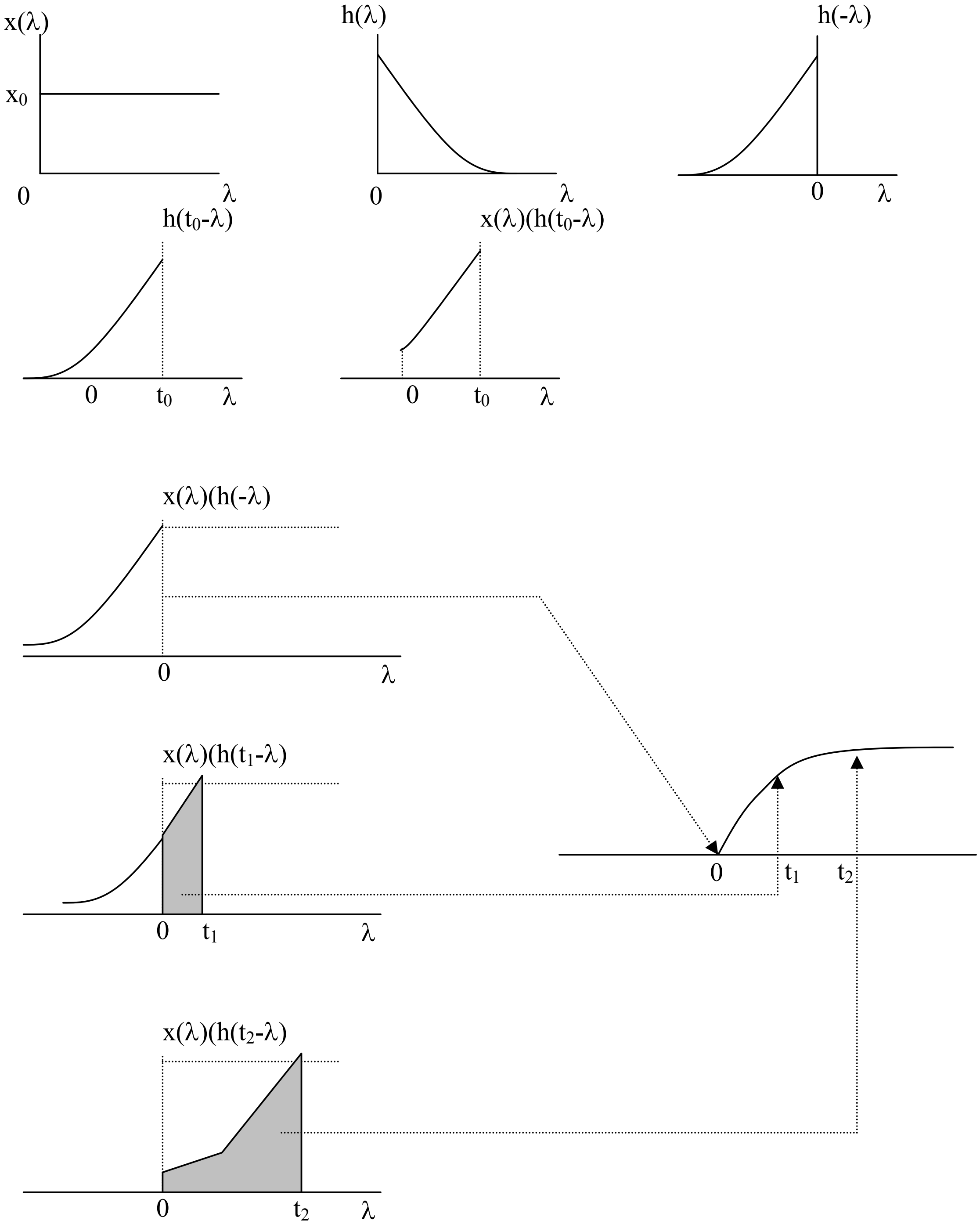
Integral konvolusi : $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda$

Misal :

$x(t) = x_0 u(t)$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

Dalam bentuk grafik :



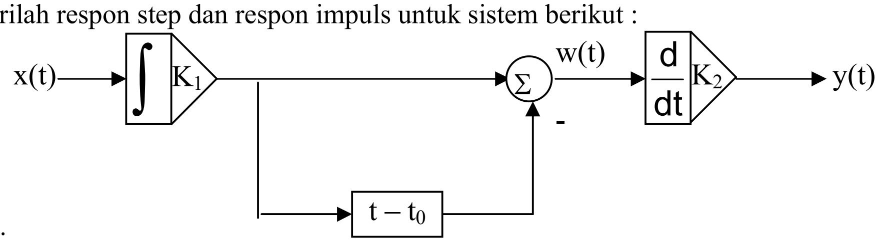
## 2.5. Respon Step

Respon step dari sistem linier adalah fungsi g(t) dengan $y(t) = x_0 g(t)$ adalah output untuk input $x_0 u(t)$. Hubungan antara respon impuls dan respon step

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

Contoh :

Carilah respon step dan respon impuls untuk sistem berikut :




Jawab :

$$w(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t} x(t)dt - k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t)dt$$

$$y(t) = k_2 \frac{dw(t)}{dt} = k_1 k_2 [x(t) - x(t - t_0)]$$

Untuk $x(t) = x_0 u(t)$

$$y(t) = k_1 k_2 x_0 [u(t) - u(t - t_0)] = k_1 k_2 x_0 r\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

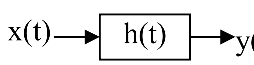
Respon step :

$$g(t) = \frac{y(t)}{x_0} = k_1 k_2 r\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

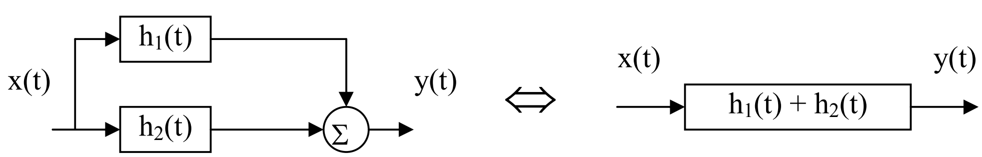
Respon impuls

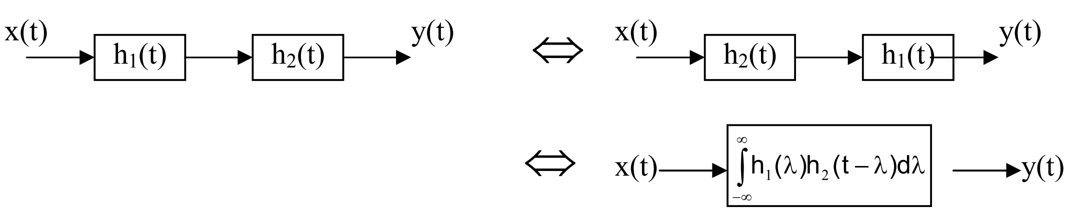
$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = k_1 k_2 \left(\delta(t) - \delta(t - t_0)\right)$$

## 2.6. Sifat-Sifat Respon Impuls Dalam Diagram Blok



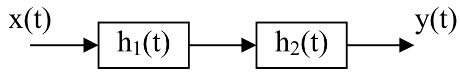

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$



Contoh :

Carilah respon impuls untuk sistem :




dengan

$$h_1(t) = \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} u(t)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{\tau_2} u(t)$$

Jawab :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) h_2(t-\lambda) d\lambda = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda/\tau_1} u(\lambda) u(t-\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\tau_2}\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) u(t)$$

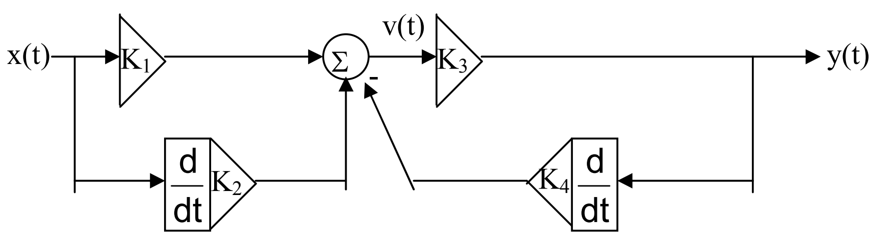
**2.7. Sistem Dinyatakan Dengan persamaan Differensial**

Beberapa sistem dapat dinyatakan dengan persamaan differensial :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + .... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + .... + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Contoh :

Carilah persamaan differensial untuk sistem




Jawab :

$$v(t) = k_1 x(t) + k_2 \frac{dx(t)}{dt} - k_4 \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y(t) = k_3 v(t)$$

$$= k_1 k_3 x(t) + k_2 k_3 \frac{dx(t)}{dt} - k_3 k_4 \frac{dy(t)}{dt}$$

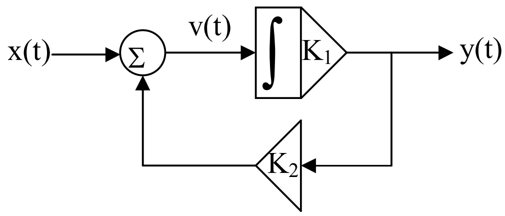
$$k_3 k_4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 k_3 \frac{dx(t)}{dt} + k_1 k_3 x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{k_3 k_4} y(t) = \frac{k_2}{k_4}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k_1}{k_4} x(t)$$

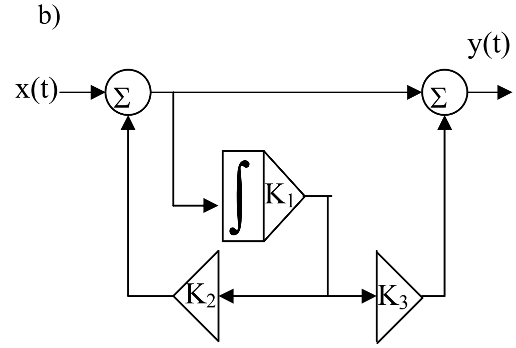
Latihan :

Carilah persamaan differensial untuk

a)




b)



# Bab III
# Respon Sinusoidal

Sinyal sinusiodal digunakan sebagai input uji terhadap kinerja sistem, misal untuk mengetahui respon frekuensi, distorsi harmonik dan distorsi intermodulasi.

### 3.1. Bentuk Amplituda-fasa untuk Sinyal Sinusoidal

Sinyal sinusoidal x(t) dapat dinyatakan dalam bentuk amplituda-fasa :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

$A$ = Amplituda puncak
$\omega$ = frekuensi sudut
$\theta$ = fasa awal

### 3.2. Bentuk Eksponensial

Sinyal sinusoidal dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$x(t) = Xe^{j\omega t} + X^*e^{-j\omega t}$$

dengan
$X$ = amplituda kompleks
$X^*$ = Konjugat dari X

Menggunakan identitas Euler : $\cos\alpha = \frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}$ diperoleh

$$X = \tfrac{1}{2}Ae^{j\theta}$$

dengan
$A = 2|X|$
$\theta = \angle X$

Contoh :
Sinyal sinusoidal :

$$x(t) = 10\cos(\omega t - \pi/4)\quad V$$

Nyatakanlah dalam bentuk eksponensial
Jawab :

$$x(t) = 5e^{-j\pi/4}e^{j\omega t} + 5e^{j\pi/4}e^{-j\omega t}\,V$$

Contoh :
Sinyal sinusoidal x(t) dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$x(t) = Xe^{j\omega t} + X^*e^{-j\omega t}$$

dengan
$X = 4e^{j3\pi/4}$ mA. Nyatakan dalam bentuk Amplituda fasa
Jawab :
$x(t) = 8\cos(\omega t + 3\pi/4)$ mA

Complex number arithmetic: A review

A complex number may be represented in rectangular form as follows:

$$c = a + jb \qquad \text{Rectangular format of complex number} \tag{1.12}$$

The number $j = \sqrt{-1}$ . $a$ is the real part of the complex number and $b$ is the imaginary part of the complex number.

The complex conjugate of a complex number is obtained by replacing $j$ with $-j$ . For the number given by Eq. (1.12) is $c^* = a - jb$

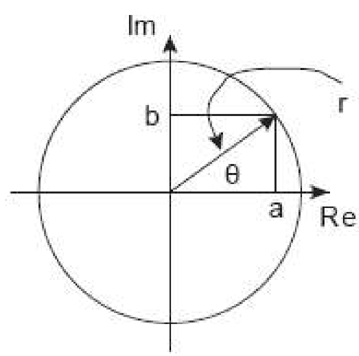
The magnitude of the complex number is

$$\text{magnitude} = cc^* = (a+jb)(a-jb) = r = \sqrt{a^2+b^2} \tag{1.13}$$

And the phase is

$$\text{phase} = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.14}$$

The graphical representation of the complex number in the complex plane is:




Euler's identity is an important relationship in the theory of complex numbers. It states:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi \tag{1.15}$$

From the graphical representation of a complex number and Euler's identity we may represent the complex number in polar form as

$$c = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} \qquad \text{Polar format of complex number} \tag{1.16}$$

Latihan :

1. Nyatakan sinyal-sinyal berikut dalam bentuk amplituda fasa
   (a) $x(t) = 10 - 5\cos(\omega t - \pi/2)$ mA
   (b) $x(t) = -20 + 10\sin\omega t$ V

(c) $x(t) = 3\cos\omega t + 4\sin\omega t$ mV
(d) $x(t) = 5e^{-j\omega t} + 5e^{j\omega t}$ V
(e) $x(t) = 2 + (1+j)e^{-j\omega t} + (1-j)e^{j\omega t}$ mA
(f) $x(t) = je^{j(\omega t - \pi/3)} - je^{-j(\omega t - \pi/3)}$ mV

(g) $x(t) = \dfrac{10e^{j\omega t}}{1-j} + \dfrac{10e^{-j\omega t}}{1+j} - 5$ mA

2. Nyatakan sinyal-sinyal berikut dalam bentuk eksponensial

(a) $x(t) = 10 + 5\cos(\omega t - \pi/4)$ V
(b) $x(t) = 20 + 10\cos\omega_1 t + 5\cos(\omega_2 t - \pi/2)$ V
(c) $x(t) = -20 + 10\sin\omega t$ mA
(d) $x(t) = 10 - 3\cos\omega t + 3\sin\omega t$ V
(e) $x(t) = 5 + 10\cos\omega_1 t + 10\cos(\omega_1 t - \pi/4) - 10\sin(\omega_2 t + \pi/4)$ V

**3.3. Fungsi Transfer untuk Sistem Linier**

Output untuk sistem linier :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)x(t-\eta)d\eta$$

Untuk input $x(t) = Xe^{j\omega t}$ maka outputnya :

$$\begin{aligned} y(t) &= X\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{j\omega(t-\eta)}d\eta \\ &= Xe^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta \\ &= Xe^{j\omega t}H(j\omega) \end{aligned}$$

dengan

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = \text{Fungsi Transfer}$$

Fungsi Transfer nilainya berubah sesuai dengan frekuensi dari sinyal input

Output dapat juga dituliskan :
$y(t) = Ye^{j\omega t}$ dengan $Y = H(j\omega)X$ = Amplituda kompleks output

Contoh :
Respon impulse suatu sistem linier :

$$h(t) = \frac{k}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

dengan $\tau = 1$ ms dan $k = 10^3$ V/A. Carilah output y(t) untuk input
$x(t) = 10\cos(\omega_0 t + \pi/4)$ mA dengan $\omega_0 = 2$ krad/s
Jawab :
Amplituda puncak : A = 10 mA
Fasa awal : $\theta = \pi/4$ rad

Amplituda kompleks input :
$X = ½\,Ae^{j\theta} = 5e^{j\pi/4}$ mA $= 0{,}005e^{j\pi/4}$ A

Fungsi Transfer sistem :

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{\tau}e^{-\pi/\tau}u(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{k}{\tau}e^{-(1+j\omega t)\eta/\tau}d\eta=\frac{k}{\tau}\left[-\frac{e^{-(1+j\omega\tau)\eta/\tau}}{(1+j\omega\tau)/\tau}\right]_{\eta=0}^{\eta=\infty}$$

$$=\frac{k}{1+j\omega\tau}$$

Amplituda Kompleks Output :

$$Y=H(j\omega_0)X=\frac{10^3}{1+j\omega_0\tau}\left(0{,}005e^{j\pi/4}\right)$$

$$=\frac{10^3}{1+j\left(2x10^3\right)\left(10^{-3}\right)}\left(0{,}005e^{j\pi/4}\right)$$

$$=\frac{5e^{j\pi/4}}{\sqrt{5}e^{j1{,}11}}=\sqrt{5}e^{-j0{,}32}\quad V$$

Amplituda puncak output :

$$B=2\left|Y\right|=2\sqrt{5}\quad V$$

Fasa awal :

$\varphi = \angle Y$ = -0,32 rad

Output dinyatakan dalam bentuk Amplituda-fasa :

$$y(t)=2\sqrt{5}\cos\left(\omega_0 t-0{,}32\right)$$

dengan

$\omega_0$ = 2krad/s

Latihan

Carilah fungsi transfer untuk sistem yang memiliki respon impuls berikut :

$$(a)\,h(t)=\delta(t)-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \qquad (b)\,h(t)=\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}u(t)$$

$$(c)\,h(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}(\sin\omega t)u(t) \qquad (d)\,h(t)=\left(\frac{1}{\tau_1}e^{-t/\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}e^{-t/\tau_2}\right)u(t)$$

$$(e)\,h(t)=\frac{1}{\tau}r\left(\frac{t}{\tau}\right) \qquad (f)\,h(t)=\omega_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega_0 t$$

$$(g)\,h(t)=\omega_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)\sin\omega_0 t \qquad (h)\,h(t)=4\delta(t)+3\delta(t-t_0)+2\delta(t-2t_0)$$

**3.4. Gain dan Phase Shift (pergeseran fasa)**

Telah diperlihatkan bahwa output sistem linier stasioner stabil untuk input $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ adalah

$y(t) = |H(j\omega_0)|A\cos[\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0)]$

dengan $H(j\omega)$ = fungsi transfer sistem

Kita nyatakan gain dengan $\Gamma(\omega)$ dan pergeseran fasa dengan $\phi(\omega)$

$\Gamma(\omega) = |H(j\omega)|$
$\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$

sehingga
$y(t) = \Gamma(\omega_0)A\cos[\omega_0 + \theta + \phi(\omega_0)]$

Contoh :
Fungsi Transfer untuk suatu sistem linier stasioner adalah

$$H(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega/\omega_2)}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3)}$$

dengan K = 100 V/V, $\omega_1$ = 1 krad/s, $\omega_2$ = 2 krad/s dan $\omega_3$ = 3 krad/s
Carilah output y(t) untuk input

$x(t) = 5\cos(\omega_0 t - \pi/3)$ dengan $\omega_0$ = 1 krad/s

Jawab :
Gain : $\Gamma(\omega) = |H(j\omega)|$

$$= \left|\frac{K(1 + j\omega/\omega_2)}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3}\right|$$

$$= \frac{|K||1 + j\omega/\omega_2|}{|1 + j\omega/\omega_1||1 + j\omega/\omega_3|}$$

$$= \frac{|K|\sqrt{1 + (\omega/\omega_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}\sqrt{1 + (\omega/\omega_3)^2}}$$

Untuk $\omega = \omega_0$ = 1 krad/s

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{100\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{1 + 1^2}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 75 \text{ V/V}$$

Pergeseran fasa :

$$\phi(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle K + \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

$$= 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_3}{1}\right)$$

Untuk $\omega = \omega_0$

$$\phi(\omega_0) = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}5}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0{,}3}{1}\right)$$

$= 0{,}46 - 0{,}79 - 0{,}32 = -0{,}65$ rad

Jadi outputnya :
$y(t) = \Gamma(\omega_0)A\cos[\omega_0 t + \theta + \phi(\omega)]$
$= (75)(5)\cos[\omega_0 t + (-\pi/3) - 0{,}65$
$= 375\cos(\omega_0 t - 1{,}7)$ V

### 3.5. Sinyal Konstan (DC = Direct Current)

Sinyal konstan (DC) dinyatakan dalam bentuk $x(t) = x_0$. Sinyal konstan ini dapat dianggap sebagai sinyal sinuisoida yang memiliki frekuensi $\omega = 0$.

Bentuk Amplituda-fasa untuk sinyal DC:

$$x_0 = A\cos\theta$$

$$A = |x_0|$$

$$\theta = \angle x_0 = \begin{cases} 0 & x_0 \geq 0 \\ \pi & x_0 < 0 \end{cases}$$

Bentuk eksponensial untuk sinyal DC:

$X = Ae^{j\theta}$ dengan

$A = |X|$

$\theta = \angle X$

Outputnya : $y(t) = H(0)\, x_0$

$H(0)$ = DC gain

Contoh :

Tentukan output dari contoh sebelumnya untuk input $x(t) = x_0 = -5$ mV

Jawab :

$$H(0) = \frac{K(1 + j0)}{(1 + j0)(1 + j0)} = K = 100 \ \ \text{V/V}$$

$$y(t) = H(0)\, x_0$$
$$= 100(-0{,}005) = -500 \text{ mV}$$

**3.6. Sistem Dinyatakan sebagai Persamaan Differensial**

Fungsi Transfer sistem linier stasioner yang stabil, output dan inputnya dihubungkan dengan persamaan differensial :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots. + b_0 x$$

Karena output untuk input $x(t) = Xe^{j\omega t}$ adalah $y(t) = H(j\omega)Xe^{j\omega t}$ maka dengan mensubstitusikan ke persamaan di atas diperoleh :

$$\left[(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots. + a_0\right]H(j\omega)Xe^{j\omega t} = \left[b_m (j\omega)^m + \ldots + b_0\right]Xe^{j\omega t}$$

atau

$$H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots. + a_0}$$

Contoh :

Input x(t) dan output y(t) dari suatu sistem dihubungkan dengan persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x$$

dengan
$a_0 = b_0 = 24 \times 10^9$
$a_1 = 26 \times 10^6$
$a_2 = 9 \times 10^3$
$b_1 = 24 \times 10^6$

Carilah output untuk input

$$x(t) = 20\cos\left(\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right)$$

dengan $\omega_0 = 5$ krad/s

Jawab :

Fungsi transfer sistem :

$$H(j\omega) = \frac{b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$
$$= \frac{j\omega b_1 + b_0}{j(a_1\omega - \omega^3) + a_0 - a_2\omega^2}$$

Untuk $\omega = \omega_0 = 5$ krad/s

$$H(j\omega_0) = \frac{j(5000)(24x10^6) + 24x10^9}{j\left[(26x10^6)(5000) - (5000)^3\right] + 24x10^9 - (9x10^3)(5000)^2}$$
$$= \frac{24 + j120}{-201 + j5} = 0{,}61e^{-j1{,}75} \quad \text{A/A}$$

Dari bentuk polar $H(j\omega_0)$ ini diketahui

$\Gamma(\omega_0) = 0{,}61$
$\phi(\omega_0) = -1{,}75$

$$y(t) = 0{,}61(0{,}02)\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - 1{,}75\right)$$
$$= 12{,}2\cos(\omega_0 t - 3{,}31)$$

Latihan :

Tentukan output dari sistem yang dinyatakan dengan persamaan differensial di bawah ini untuk input :

$x(t) = 5 + 5\cos\omega_0 t$ V

dengan $\omega_0 = 1$ rad/s

(a) $\frac{dy}{dt} + 5\omega_0 y = \frac{dx}{dt}$

(b) $\frac{dy}{dt} + 5\omega_0 y = 10\frac{dx}{dt} + 2\omega_0 x$

(c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0\frac{dy}{dt} + 2\omega_0^2 y = 5\frac{d^2x}{dt^2} + 20\omega_0\frac{dx}{dt} + 15\omega_0^2 x$

(d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0\frac{dy}{dt} + 2\omega_0^2 y = \omega_0\frac{dx}{dt}$

$$(e)\ \frac{d^3y}{dt^3} + 3\omega_0 \frac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0{}^2 \frac{dy}{dt} + 2\omega_0{}^3 y = 10\frac{d^3x}{dt^3}$$

**Superposisi**

Superposisi digunakan untuk memperoleh output sistem linier stasioner yang inputnya terdiri dari beberapa komponen sinusoidal

Contoh : Carilah output dari sistem yang memiliki fungsi transfer :

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

dengan $\tau = 1$ ms

untuk input :

$$x(t) = 5 + 4\cos\omega_0 t + 3\cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{dengan } \omega_0 = 1\,\text{krad/s}$$

Jawab :

Gain dan pergeseran fasa sistem

$$\Gamma(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \angle 10 - \angle 1 + j\omega\tau$$
$$= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right)$$

Output untuk komponen DC $x_o = 5$

$y_0 = H(0)x_0 = (10)(5) = 50$

Output untuk $x_1(t) = 4\cos\omega t$

$y_1(t) = \Gamma(\omega_0)\, 4\cos[\omega_0 t + \phi(\omega_0)] = 28{,}3\cos(\omega_0 t - \pi/4)$

Output untuk $x_2(t) = 3\cos(2\omega_0 t - \pi/2)$ adalah

$$y_2(t) = \Gamma(2\omega_0) 3\cos\left[2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \phi(2\omega_0)\right]$$
$$= 13{,}4\cos(2\omega_0 t - 2{,}68)$$

dengan superposisi

$y(t) = y_0 + y_1(t) + y_2(t)$

$$= 50 + 28{,}3\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 13{,}4\cos(2\omega_0 t - 2{,}68)$$

Latihan :

Carilah output untuk sistem yang memiliki fungsi transfer berikut untuk input

$$x(t) = 5 + 4\cos\omega_0 t + 3\cos\left(2\omega_0 - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{V}$$

$$(a)\ H(j\omega) = \frac{100}{1 + 4j(\omega/\omega_0)} \quad \text{mA/V} \qquad (b)\ H(j\omega) = \frac{1 - 10j(\omega/\omega_0)}{1 + 5j(\omega/\omega_0)} \quad \text{V/V}$$

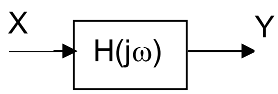
$$(c)\ H(j\omega)=\frac{j(\omega/\omega_0)}{-100\omega^2+j\omega\omega_0+100\omega_0{}^2}\quad \text{V/V} \qquad (d)\ H(j\omega)=\frac{j(\omega/\omega_0)}{1+j(\omega/\omega_0)}\quad \text{V/V}$$

$$(e)\ H(j\omega)=\frac{2}{[1+j(\omega/\omega_0)][2+j(\omega/\omega_0)]}\quad \text{mA/V} \qquad (f)\ H(j\omega)=\frac{5}{0{,}5+j(\omega/\omega_0)}\quad \text{V/V}$$

$$(g)\ H(j\omega)=5e^{-j\pi\omega/\omega_0}\quad \text{mA/V}$$

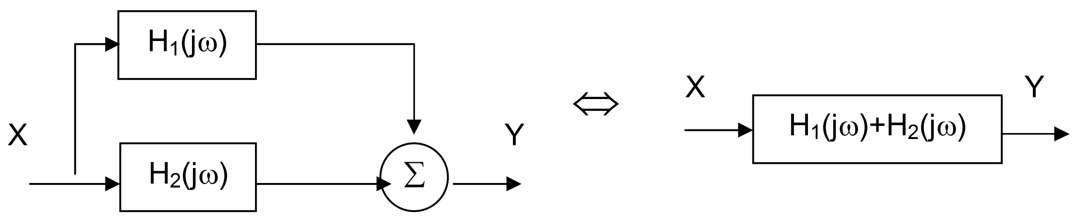
### 3.7. Reduksi Diagram Blok

Fungsi Transfer dapat dinyatakan dengan diagram blok sebagai berikut :

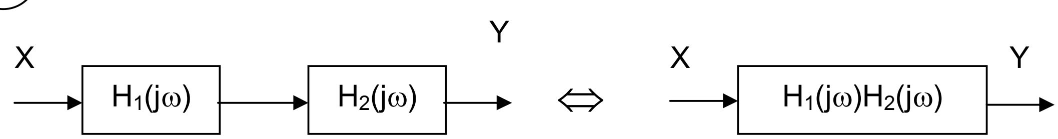



Y = H(jω)X

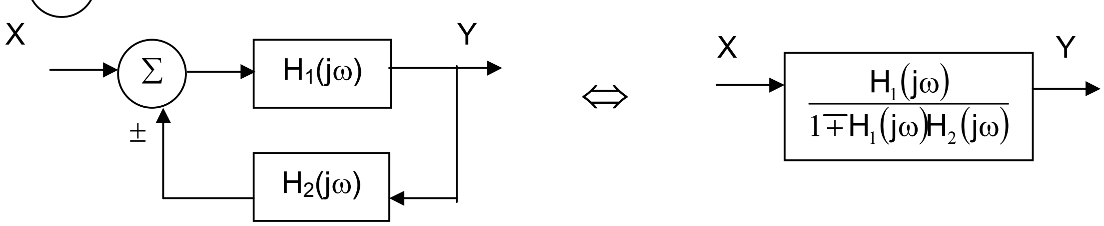
1

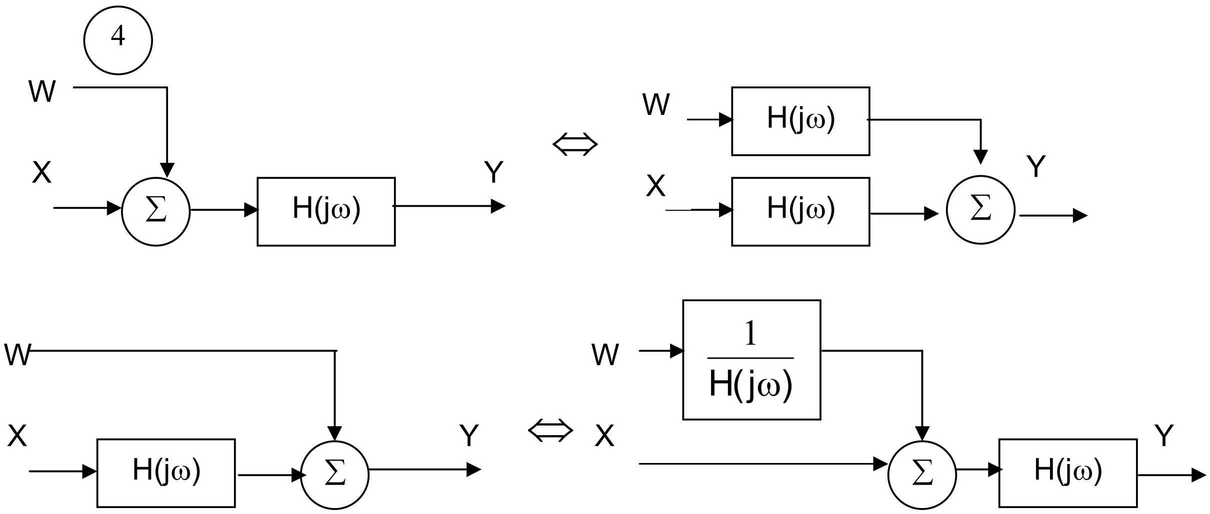


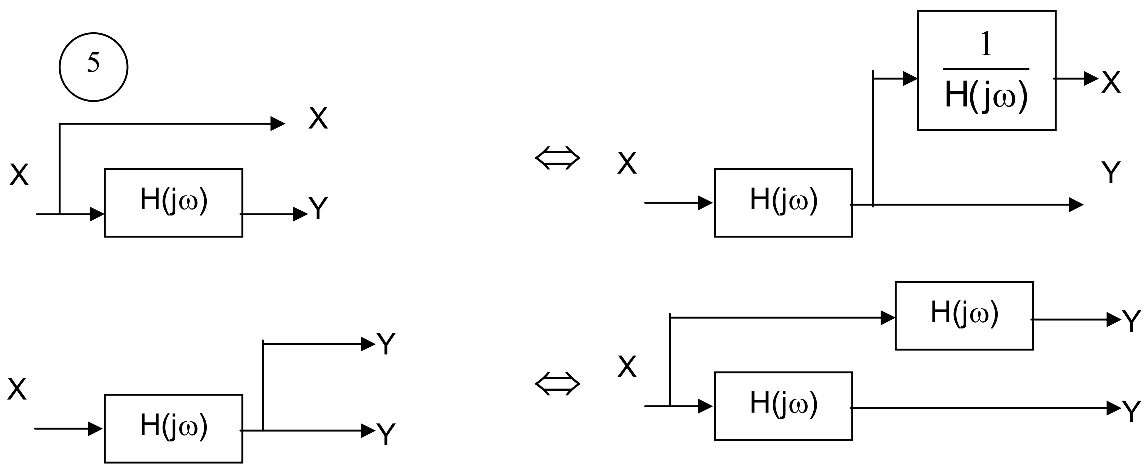

2




3

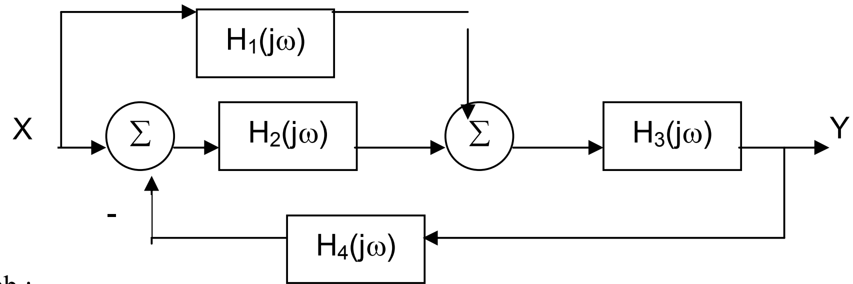



4
W
X
Σ
H(jω)
Y
⇔
W
H(jω)
X
H(jω)
Σ
Y
W
X
H(jω)
Σ
Y
⇔
W
1
H(jω)
X
Σ
H(jω)
Y

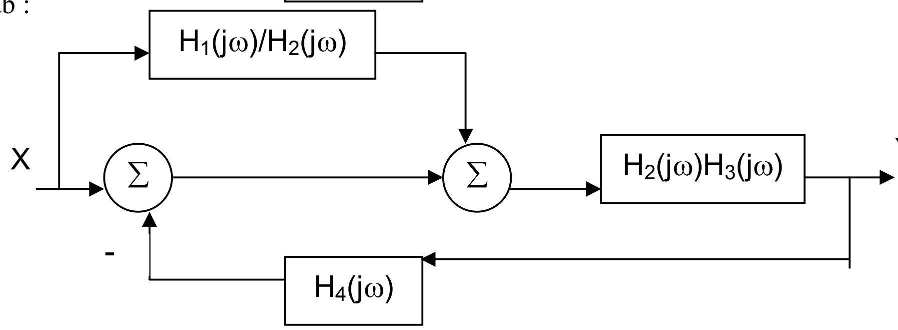

5
X
X
H(jω)
Y
⇔
1
H(jω)
X
X
H(jω)
Y
X
H(jω)
Y
Y
⇔
H(jω)
Y
X
H(jω)
Y

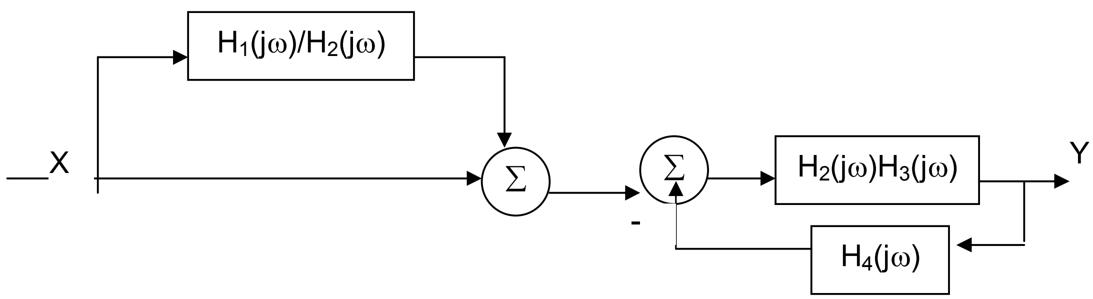
Contoh :

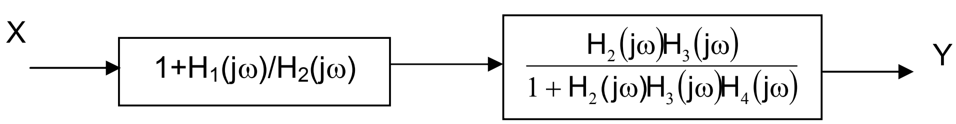
Carilah Fungsi Transfer dengan mereduksi diagram blok berikut :




Jawab :



# Bab IV
# Analisis Domain Frekuensi

### 4.1. Amplituda dan Fasa

Suatu sinyal x(t) yang berada pada interval hingga $t_0 \le t < t_0 + T$ dapat dinyatakan dengan deret harmonik sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos\theta_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned} \tag{*}$$

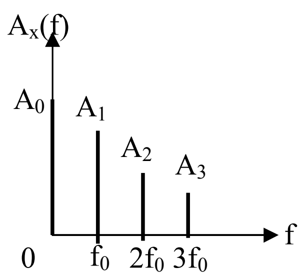
dengan

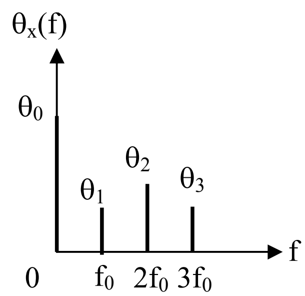
$\omega_0$ = frekuensi natural/dasar

= $2\pi/T$

= $2\pi f$

Bentuk deret harmonik ini menunjukkan spektrum Amplituda dan spektrum fasa dengan frekuensi masing-masing yang dapat digambarkan sebagai berikut :




Spektrum Amplituda dan fasa (one-sided spectrum)

$$A_x(f) = \begin{Bmatrix} A_n & f = nf_0 \\ 0 & f \ne nf_0 \end{Bmatrix} \qquad \theta_x(f) = \begin{Bmatrix} \theta_n & f = nf_0 \\ 0 & f \ne nf_0 \end{Bmatrix}$$

Contoh :

Gambarkan spektrum dari sinyal

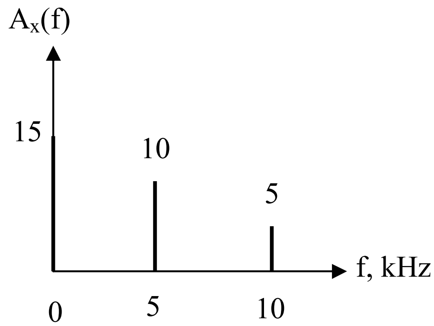
$$x(t) = -15 + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 5\cos\left(2\omega_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

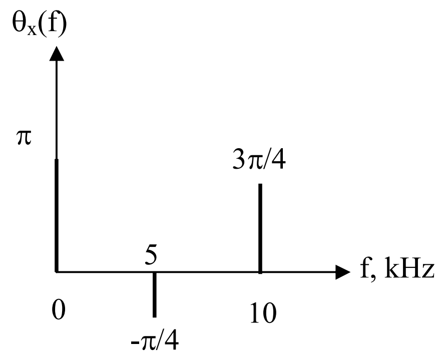
dengan $f_0$ = 5 kHz

Jawab :

Komponen DC dapat dinyatakan dengan : -15 = 15 cos π

$$A_x(f) = \begin{Bmatrix} 15 & f = 0 \\ 10 & f = 5\text{kHz} \\ 5 & f = 10\text{kHz} \\ 0 & f \text{ yang lain} \end{Bmatrix} \qquad \theta_x(f) = \begin{Bmatrix} \pi\,\text{rad} & f = 0 \\ -\frac{\pi}{4}\,\text{rad} & f = 5\text{kHz} \\ \frac{3\pi}{4}\,\text{rad} & f = 10\text{kHz} \\ 0 & f \text{ yang lain} \end{Bmatrix}$$




Latihan :
Gambarkan spektrum dari sinyal berikut :

(a) $x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t - \pi/4) + 15\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$, $f_0 = 2$ kHz
(b) $x(t) = 10 - 5\cos(\omega_0 t - \pi/4) + 10\cos(3\omega_0 t)$, $f_0 = 5$ kHz
(c) $x(t) = 4\cos(2\omega_0 t - \pi/4) + 18\cos(4\omega_0 t + \pi/2) + 9\cos(7\omega_0 t + 3\pi/4)$, $f_0 = 1$ kHz
(d) $x(t) = 2 + 8\cos(3\omega_0 t + 3\pi/4) + 20\cos(5\omega_0 t + \pi/6)$, $f_0 = 4$ kHz

**4.2. Spektrum Kompleks**

Sinyal x(t) pada persamaan (*) dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$x(t) = \ldots + X_2^* e^{-j2\omega_0 t} + X_1^* e^{-j\omega_0 t} + X_0 + X_1^* e^{j\omega_0 t} + X_2^* e^{j\omega_0 t} + \ldots$$

dengan $X_0 = A_0 \cos\theta_0$ (Komponen DC)
dan

$$X_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\theta_n} \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dari definisi $X_{-n} = X^*$

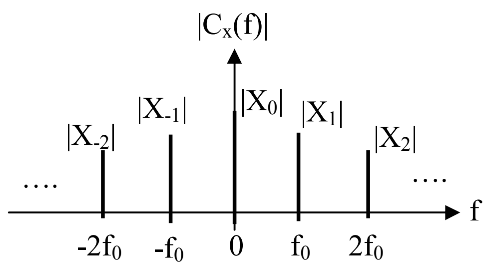
Sehingga persamaan di atas dapat ditulis

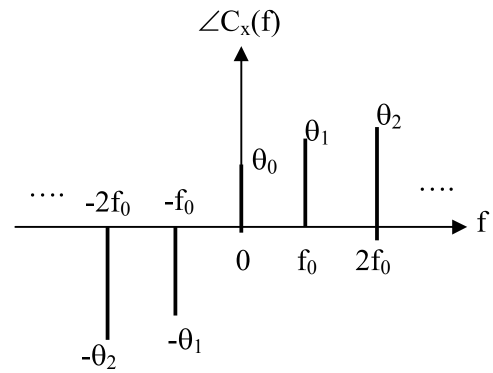
$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}}$$

Amplituda kompleks $X_n$ kemudian dinyatakan sebagai fungsi frekuensi yang disebut spektrum frekuensi : $C_x(f)$

$$C_x(f) = \begin{Bmatrix} X_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Spektrum kompleks dalam gambar dinyatakan dengan magnituda dan sudutnya yaitu
$|C_x(f)|$ disebut spektrum amplituda (two-sided amplitude spectrum)
dan
$\angle C_x(f)$ disebut spektrum fasa 2 sisi (two-sided phase spectrum)




Hubungan spektrum 2-sisi dengan spektrum 1-sisi

$$A_x(f) = \begin{cases} |C_x(f)| & f = 0 \\ 2|C_x(f)| & f > 0 \end{cases}$$

$\theta_x(f) = \angle C_x(f),\ \ f \geq 0$

atau

$$C_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_x(f) e^{-j\theta_x(f)} & f < 0 \\ A_x(f) e^{j\theta_x(f)} & f = 0 \\ \frac{1}{2} A_x(f) e^{j\theta_x(f)} & f > 0 \end{cases}$$

Spektrum 2-sisi simetris pada f = 0.

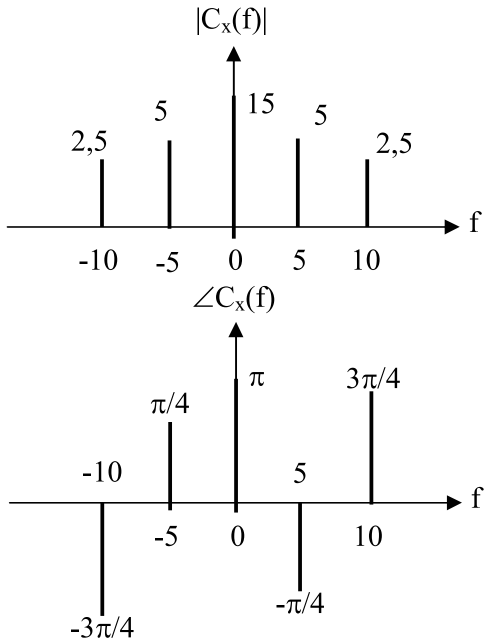
Contoh :

Gambarkan spektrum 2-sisi untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{2} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $f_0$ = 5 kHz, $X_0$ = -15, $X_1 = 5e^{-j\pi/4}$, $X_2 = 2{,}5e^{j3\pi/4}$

catatan : $X_{-1} = X_1^*$
$X_{-2} = X_2^*$




Latihan :

Gambarkan spektrum 2-sisi untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{3} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $f_0$ = 2 kHz, $X_0 = 10$, $X_1 = 4e^{-j\pi/4}$, $X_2 = 6e^{j3\pi/4}$ , $X_3 = 8e^{-j\pi/3}$

**4.3. Analisis Domain Frekuensi untuk Sistem Linier Stasioner**

Untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

Output untuk sistem linier stasioner adalah

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jn\omega_0) X_n e^{jn\omega_0 t}$$

atau

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $Y_n = H(jn\omega_0)X_n$

spektrum kompleks output :

$$Y_n = \begin{cases} H(j2\pi f)X_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{cases}$$

atau

$$C_y(f) = H(j2\pi f)C_x(f)$$

sehingga

$$\boxed{\begin{aligned} |C_y(f)| &= |H(j2\pi f)||C_x(f)| \\ \angle C_x(f) &= \angle H(j2\pi f) + \angle C_x(f) \end{aligned}}$$

dan untuk spektrum 1-sisi

$$\boxed{\begin{aligned} A_y(f) &= \Gamma(2\pi f)A_x(f) \\ \theta_x(f) &= \phi(2\pi f) + \phi_x(f) \end{aligned}}$$

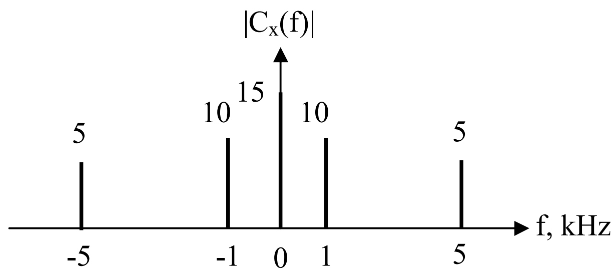
Contoh :

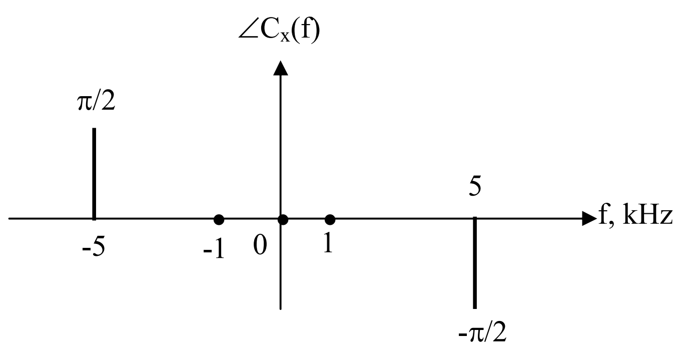
Fungsi transfer sebuah sistem

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_1)}$$

dengan $f_1 = \omega_1/2\pi = 1$ kHz

Spektrum 2 sisi untuk inputnya :




Carilah :

a. Spektrum kompleks dari output

b. Bentuk amplituda fasa dari output

c. Persamaan output dalam fungsi waktu

Jawab :

a.

| f, kHz | $C_x(f)$ | $H(j2\pi f)$ | $C_y(f)$ |
|---|---|---|---|
| -5 | $5e^{j\pi/2}$ | $0{,}196e^{j1{,}37}$ | $0{,}98e^{j2{,}94}$ |
| -1 | 10 | $0{,}707e^{j0{,}785}$ | $7{,}07e^{j0{,}785}$ |
| 0 | 15 | 1 | 15 |
| 1 | 10 | $0{,}707e^{-j0{,}785}$ | $7{,}07e^{-j0{,}785}$ |
| 5 | $5e^{-j\pi/2}$ | $0{,}196e^{-j1{,}37}$ | $0{,}98e^{-j2{,}94}$ |

b. Spektrum 1 sisi dari dari output

| f, kHz | $A_y(f)$ | $\theta_y(f)$, rad |
|---|---|---|
| 0 | 15 | 0 |
| 1 | 14,1 | -0,785 |
| 5 | 1,96 | -2,94 |

c.

$$y(t) = 15 + 14{,}1\cos(\omega_0 t - 0{,}785) + 1{,}96\cos(5\omega_0 t - 2{,}94)$$

dengan $f_0 = 1$ kHz

Latihan :

a. Gambarkan respon frekuensi dari output dalam bentuk spektrum 2-sisi untuk sistem dengan fungsi transfer :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega/\omega_2}{3(1 + j\omega/\omega_1)(j\omega/\omega_2)}$$

dengan $f_1 = 1$ kHz, $f_2 = 2$ kHz.
Untuk input :

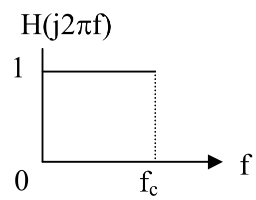
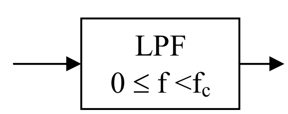
$$x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t - \pi/4) - 10\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$$

dengan $f_0 = 4$ kHz

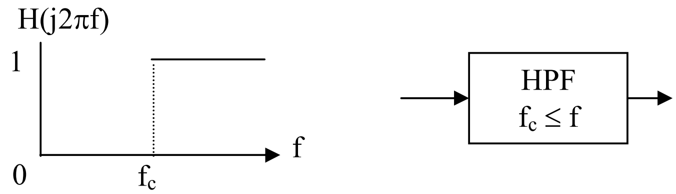
## 4.4. Filter

Filter adalah sistem linier stasioner yang dirancang untuk melewatkan sinyal sinus pada frekuensi tertentu (passband) atau menghilangkan sinyal sinus pada frekuensi tertentu (stopband)

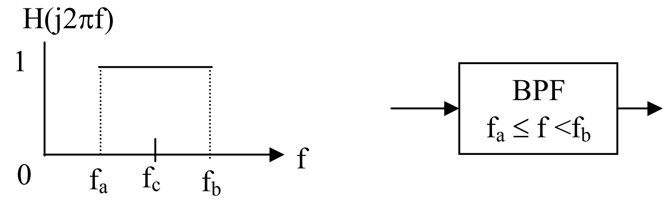
Tabel 3.1. Filter Ideal dengan frekuensi cut off ($f_c$)

| Nama Filter | Fungsi Transfer | Simbol |
|---|---|---|
| Low Pass Filter |  |  |

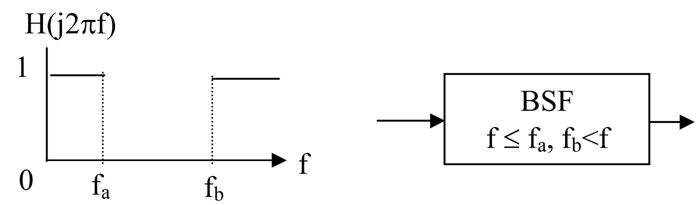
High  Pass Filter




Band Pass Filter

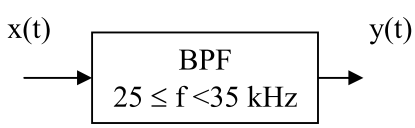



Band Stop Filter




Contoh :

Carilah output dari filter band pass ideal



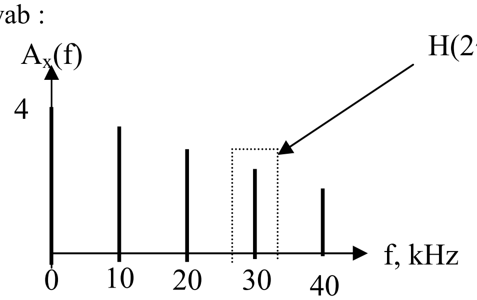

Untuk input :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

dengan $f_0$ = 10 kHz, $\theta_n$ = -0,2n rad

$$A_n = \frac{4}{\sqrt{1+n^2}}$$

Jawab :



Filter melewatkan komponen input berfrekuensi 30 kHz dan menstop komponen-komponen input yang lainnya. Sehingga outputnya :

$$y(t) = A_3 \cos(3\omega_0 t + \theta_3) = \frac{4}{\sqrt{10}} \cos(3\omega_0 t - 0{,}6)$$

dengan $3f_0$ = 30 kHz

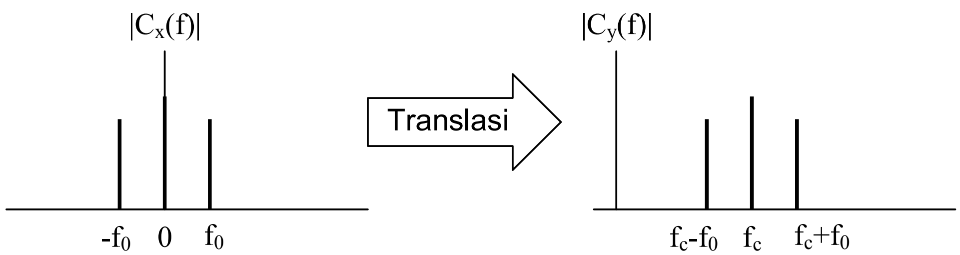
### 4.5. Translasi Spektrum dan Modulasi

Translasi spektrum pada sinyal input :

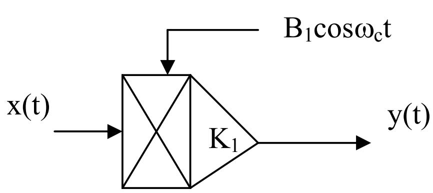
$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$$

atau

$C_y(f) = C_x(f - fc)$




Modulasi Sinyal



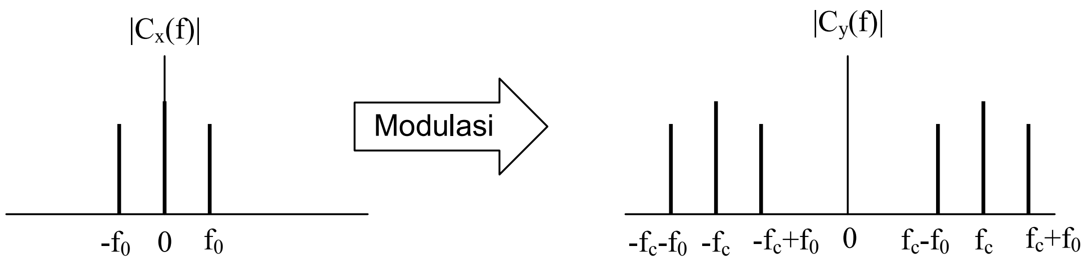

$y(t)$ = ½ $K_1 B_1 x(t)\cos\omega_c t$ ; dengan $\omega_c$ = frekuensi gelombang pembawa (carrier)

Menggunakan identitas Euler

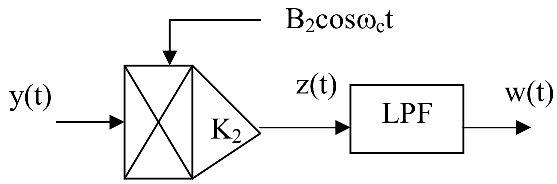
$$y(t) = \frac{1}{2} K_1 B_1 \left[ x(t)e^{j\omega_c t} + x(t)e^{-j\omega_c t} \right]$$

atau dalam bentuk spektrum kompleks

$$C_y(t) = \frac{1}{2} K_1 B_1 \left[ C_x(f - f_c) + C_x(f + f_c) \right]$$




Untuk mengembalikan sinyal termodulasi ke bentuk semula digunakan demodulasi




$z(t) = K_2B_2y(t)\cos\omega_c(t) = K_2B_2K_1B_1x(t)\cos^2\omega_ct = Dx(t)\cos^2\omega_ct$

Menggunakan identitas $2\cos^2\alpha = 1 + 2\cos2\alpha$ diperoleh

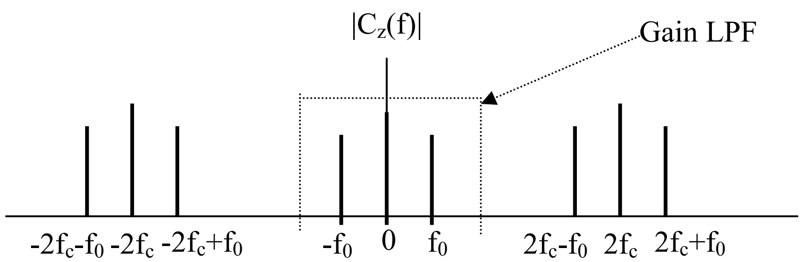
$z(t) = ½\, Dx(t) + ½\, Dx(t)\cos2\omega_c(t)$

Sinyal termodulasi

Sinyal asli

Dalam bentuk spektrum kompleks :

$C_z(f) = ½\, DC_x(f) + ¼\, D[C_x(f\text{-}2f_c) + C_x(f+2f_c)]$



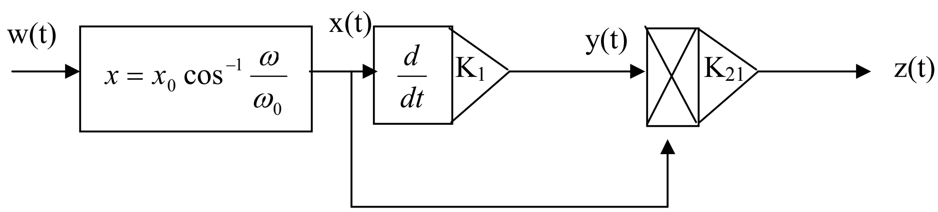

Menggunakan LPF diperoleh $w(t) = ½\, Dx(t)$ dengan catatan bandwidth LPF $f<f_c$ dan $f_c>nf_0$ (untuk mencegah aliasing)

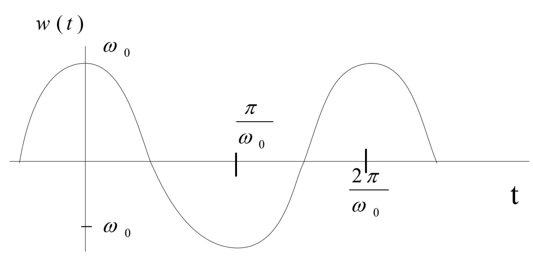
# Bab V
# Fourier

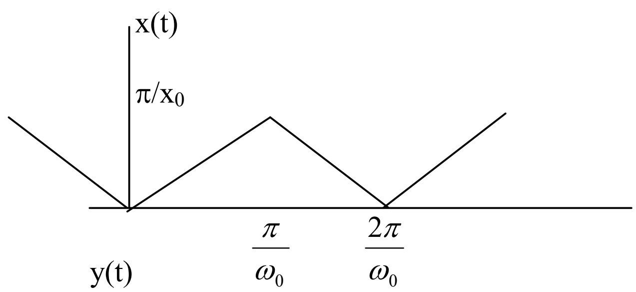
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) adalah ahli Fisika dan Matematika Perancis yang menggunakan deret harmonik untuk mempelajari konduksi panas dalam benda padat

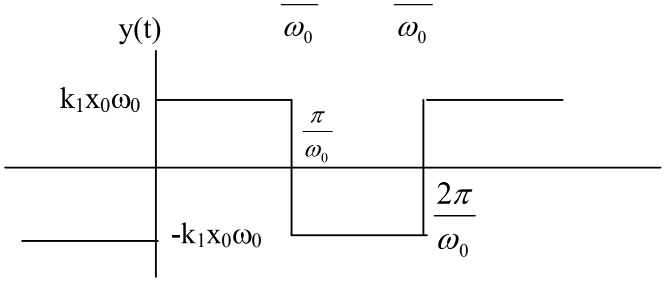
### 5.1. Deret Fourier

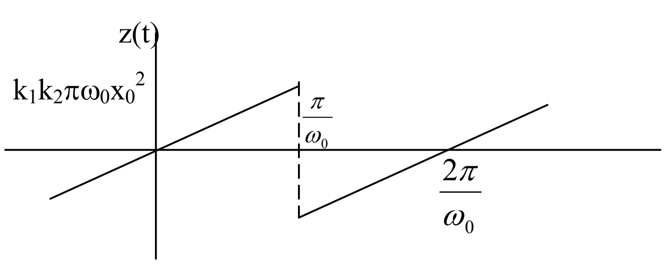
Setiap bentuk gelombang riil dapat dihasilkan (secara matematik) dengan mendistorsikan sebuah gelombang berbentuk sinus. Sebagai contoh di bawah ini adalah sistem yang menghasilkan gelombang segitiga, gelombang kotak dan gelombang gigi gergaji (sawtooth) sebagai respon dari input sinus $w(t) = w_0 \cos \omega_0 t$



Hal ini menyatakan bahwa setiap sinyal periodik dapat dinyatakan oleh deret harmonik (karena output dari sebuah eksitasi sinus pada sistem statik dapat dinyatakan sebagai deret harmonik). Sebagai contoh gelombang segitiga yang dihasilkan dari rangkaian di atas dapat dinyatakan dengan sebuah deret harmonik :

$$x(t) = A_0 \cos\theta_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2) + ....$$

Dengan $A_n$ adalah amplituda puncak dan $\theta_n$ adalah fasa awal (n = 0, 1, 2, ..)

4.1.A. Koefisien Fourier

Diasumsikan bahwa sinyal periodik x(t) dapat dinyatakan dengan deret harmonik sebagai berikut :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Dengan $A_n = \begin{cases} |X_0| & n = 0 \\ 2|X_0| & n \neq 0 \end{cases} \qquad \theta_n = \angle X_n$

Atau dalam bentuk eksponensial :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(jn\omega_0 t)$$

Karena perioda dari deret harus sama dengan perioda sinyal yang direpresentasikannya maka frekuensi dasar dapat dinyatakan dengan

$f_0 = \dfrac{1}{T}$; T = perioda sinyal

Jika sinyal x(t) dikalikan dengan $e^{-jk\omega_0 t}$ dan diintegrasikan untuk satu perioda t = $t_0$ sampai t = $t_0$ + T. Memberikan transformasi Fourier kontinu:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j(n-k)\omega_0 t} dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-k)} dt = \begin{cases} \mathrm{T} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Sehingga nilai yang tidak nol pada sumasi di atas hanya untuk n = k maka

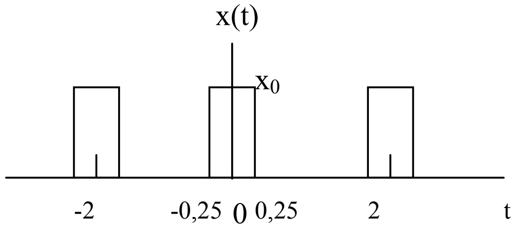
$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} = X_k T \quad \text{atau}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$x_k$ ini disebut koefisien Fourier untuk sinyal x(t) sedangkan deret harmonik yang dibentuknya disebut deret Fourier.

Contoh 4.1.

Carilah deret Fourier dari deret pulsa kotak berikut :




Jawab :
Perioda dari sinyal x(t) adalah T = 2 ms, maka frekuensi dasar deret Fourier untuk x(t) adalah :

$$f_0 = \frac{1}{0{,}002} = 500\ Hz$$

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{0{,}002} = \pi\ krad/s$$

Misal dipilih $t_0 = \frac{-T}{2} = -1\,\text{ms}$ sehingga $t_0 + T = \frac{T}{2} = 1\,\text{ms}$ maka

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad \text{dengan}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad -T/2 < t \le -\tau/2 \\ x_0 & ; \quad -\tau/2 < t \le \tau/2 \\ 0 & ; \quad \tau/2 < t \le \tau/2 \end{cases}$$

Koefisien Fouriernya adalah :

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_0 dt = \frac{x_0}{T}T = x_0$$

dan sinyal ini sekarang dapat dinyatakan dengan

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(k\omega t)$$