**TRANSFORMASI LINEAR**

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui definisi dan contoh-contoh transformasi linear.
2. Menggunakan definisi transformasi linear untuk memeriksa suatu fungsi merupakan suatu transformasi linear atau bukan.
3. Mengkaji sifat-sifat transformasi linear.
4. Menggunakan definisi ruang kernel dan range untuk menentukan basis dari suatu matriks transformasi
5. Menghitung dimensi dari matriks transformasi
6. Mengkaji sifat dari matriks transformasi, matriks standar pada operator linear
7. Menghitung matriks transisi *P* untuk menentukan matriks transformasi pada suatu basis *B*’

**MATERI :**

* 1. **Transformasi Linear**

**Definisi 5.1**

Suatu fungsi yang memetakan suatu vektor di ruang vektor *V* ke ruang vektor *W* (dituliskan ) disebut sebagai *transformasi linear* bila berlaku :

1. 
2. 

Jika *V*=*W* maka transformasi disebut suatu *operator linear* pada *V*.

Transformasi dengan disebut *transformasi nol*.

Transformasi dengan disebut *transformasi matriks*, sedangkan *A* disebut matriks transformasi.

Transformasi dengan  , *I* disebut *operator identitas* pada *V*.

**Contoh 5.1**

Diketahui dengan . Periksalah apakah *T* adalah transformasi linear?

**Penyelesaian:**

Ambil sembarang

1.  maka



1. Ambil suatu skalar sembarang sehingga



Jadi dari a) dan b) terbukti bahwa  adalah transformasi linear.

**Contoh 5.2**

Diketahui dengan . Periksalah apakah *T* adalah transformasi linear?

**Penyelesaian:**

Untuk sebarang dan sebarang diperoleh



Sehingga  bukan merupakan transformasi linear.

**✍ Latihan 5.1**

Periksa apakah dengan  merupakan suatu transformasi linear

Berikut ini adalah sifat-sifat transformasi linear

**Teorema 5.1**

Jika adalah suatu transformasi linear, maka:

* 1. **Kernel dan Range**

**Definisi 5.2**

Diketahui transformasi linear dengan . Kernel dari *T* (dinotasikan Ker(*T*)) adalah himpunan sedemikian sehingga atau Ker(*T*)=. Ker(*T*) sering disebut ruang nol dari *T*. Himpunan semua sedemikian sehingga disebut range dari *T* atau disingkat . disebut juga dengan bayangan oleh .

**Definisi 5.3**

Jika adalah suatu transformasi linear, maka dimensi daerah hasil dari *T* dinyatakan sebagai rank dari *T* (notasi : rank(*T*)) dan dimensi dari *T* dinyatakan nullitas dari *T* (notasi:nullitas(*T*)).

**Teorema 5.2**

Jika *A* adalah suatu matriks *mxn* dan adalah perkalian dengan *A*, maka :

1. Nullitas( = Nullitas(*A*)
2. Rank(( = Rank (*A*)
3. Rank((+ Nullitas(=*n*

**Contoh 5.3**

Tentukan basis dan dimensi dari dan dari transformasi linear dengan , dengan dan 

**Penyelesaian :**

1. Kernel

adalah ruang nol dari  maka

 sehingga 

Jadi basis dan Rank(( = dim

1. Range

merupakan himpunan dari dengan maka adalah ruang kolom dari . Sehingga basis dari adalah  dan dim .

**✍ Latihan 5.2**

1. Tentukan Nullitas (*T*) berdasarkan informasi berikut ini
2. punya rank (*T*) =3
3. punya rank(*T*) =1
4. Daerah hasil dari adalah
5. Diketahui transformasi matriks memiliki matriks transformasi  . Tentukan basis dan dimensi dari dan .
6. Anggap adalah operator linear yang ditentukan dari
7. Tentukan basis dari ruang Kernel dan ruang Rangenya
8. Periksa apakah vektor (5,0) dan vektor (-3,12) berada pada *R*(*T*)
9. Periksa apakah vektor (3,2) dan vektor (5,10) berada pada *Ker*(*T*)
   1. **Matriks Transformasi**

**Definisi 5.4**

Diketahui ruang *V*,*W* dengan dimensi ruang vektor berturut-turut *n* dan *m* dan transformasi linear dengan fungsi , . Jika *B* merupakan basis *V*, dan *B’*adalah basis dari *W* . Jika *A* adalah matriks standar maka dapat ditentukan dengan

A disebut *matriks untuk T berkenaan dengan basis B dan B’*

T

A

T= transformasi V ke W

A matriks transformasi yang memetakan ke

Diasumsikan adalah basis pada ruang V dan adalah basis pada ruang W, maka untuk mengkonstruksi matriks *A* dapat diperoleh dengan cara mentransformasi basis-basis di *B* lalu menentukan koordinat vektor dari setiap hasil transformasi matriks terhadap basis-basis *B*’ . Dapat dituliskan

 atau 

Sehingga dapat dituliskan menjadi .

Notasi subscript kanan adalah suatu basis untuk daerah asal *T*, sedangkan subscript kiri adalah suatu basis untuk ruang bayangan dari *T*. Jadi untuk notasi basis dari daerah asal adalah *B* dan basis untuk ruang bayangan adalah *B*’.

Jika *V*=*W* maka persamaan dapat dituliskan menjadi .

**Contoh 5.4**

Diketahui transformasi linear dengan .

Jika *A* ={(3,1)T,(5,2)T} adalah basis dari dan

*B=*={(1,0,-1)T,(-1,2,2)T,(0,1,2)T}adalah dari

1. Tentukan matriks *T* terhadap basis *A* dan *B*.
2. Dengan cara tak langsung untuk Tentukan
3. Dengan cara langsung untuk Tentukan

**Penyelesaian:**

1. Pertama dihitung nilai dan (dengan kata lain bayangan dari dan ) yaitu

dan

Karena dan berada di *R*3 dan *B=* adalah basis dari *R*3 maka masing dan dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari , sehingga

dan

Maka dengan OBE diperoleh vektor koordinat dan terhadap basis *B* yaitu

dan .

Jadi matriks transformasi .

1. Cara tak langsung adalah dengan mencari terlebih dahulu, karena dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari dan maka dapat dituliskan dengan:

Sehingga diperoleh = lalu diketahui bahwa masi sehingga

. Vektor adalah vektor koordinat dari daerah hasil terhadap basis *B* maka

Vektor

1. Dengan cara langsung maka

Hasil b. sama dengan hasil c.

**✍ Latihan 5.3**

Misal merupakan basis . Transformasi linear memiliki fungsi dengan , .

1. Tentukan matriks transformasi *A* sedemikian sehingga
2. Tentukan bayangan (1,2,1) dari transformasi tersebut
   1. **Matriks baku/standar**

Jika *T* adalah suatu transformasi linear, maka matriks standar untuk *T* bisa didapatkan dari

bayangan vektor-vektor basis standar. Suatu transformasi linear secara lengkap ditentukan

oleh bayangan sebarang vektor-vektor basis.

**Definisi 5.5**

Misalkan dengan memiliki basis standar *S* = . Maka matriks standar untuk *T* adalah .

**Contoh 5.5**

Diketahui transformasi matriks dengan

Tentukan matriks standar untuk *T*.

**Penyelesaian:**

Jadi matriks standar *T* = dengan .

**✍ Latihan 5.4**

Misalkan adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh .

1. Tentukan matriks untuk *T* berkenaan dengan basis-basis standar

= dan =

1. Jika Tentukan
   1. **Keserupaan/Similaritas**

Matriks operator linear tergantung pada basis yang dipilih untuk . Salah satu masalah dasar dari aljabar linear adalah memilih suatu basis untuk *V* yang membuat matriks *T* sesederhana mungkin, misalnya matriks diagonal atau matriks segitiga.

**Masalah**

*Jika B dan B’ adalah dua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga V*, *dan jika adalah suatu operator linear apa kaitan antara dengan .*

**Teorema 5.3**

Anggap adalah suatu linear pada suatu ruang vektor berdimensi terhingga*V* , dan anggap *B* dan *B’* adalah basis-basis untuk *V*. Maka



Dimana *P* adalah matriks transisi **dari *B’* ke *B*.**

**Contoh 5.6**

Misalkan didefinisikan oleh

1. Tentukan matriks *T* berkenaan dengan basis standar *B*
2. Jika *B’* , tentukan matriks *T* berkenaan dengan basis standar *B’*.
3. Hitunglah ,

**Penyelesaian:**

1. maka

 dan 

Sehingga 

1. Untuk mencari maka disusun matriks transisi dari *B’* ke *B* sehingga

****

**** dan **** sehingga diperoleh matriks

dan dihitung

1. Dapat ditunjukkan bahwa dan =

Secara umum  dan disebut matriks yang serupa, berikut ini diberikan definisi secara umum andaikan  dan maka perhatikan definisi berikut ini.

**Definisi 5.6**

Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks bujur sangkar, *B* dikatakan **serupa** dengan *A* jika ada suatu matriks *P* yang dapat dibalik sedemikian sehingga .

Perhatikan bahwa *A* juga dapat dituliskan menjadi sehingga *A* dan *B* disebut serupa.

**Sifat-sifat matriks yang serupa**

|  |  |
| --- | --- |
| **Sifat** | **Uraian** |
| Determinan | dan mempunyai determinan yang sama |
| Dapat dibalik atau tidak | *A* dapat dibalik jika dan hanya jika *P-1AP* dapat dibalik. |
| Rank | dan mempunyai rank yang sama |
| Nullitas | dan mempunyai nullitas yang sama |
| Trace | dan mempunyai trace yang sama |

**✍ Latihan 5.5**

didefinisikan oleh

 dengan  dan 

1. Tentukan matriks dari *T* berkenaan dengan *B*
2. Tentukan matriks dari *T* berkenaan dengan *B’*