



FUNGSI TRANSENDEN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Memahami konsep dasar integral, teorema-teorema, sifat-sifat, notasi jumlah

Materi :

1.3 Notasi Sigma ( $\Sigma$ )

Notasi sigma (jumlah):

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ dan } \sum_{i=1}^n k = k + k + \dots + k = nk$$

Sifat dan rumus sigma

1.  $\sum_{i=1}^n (ka_i + lb_i) = k \sum_{i=1}^n a_i + l \sum_{i=1}^n b_i$
2.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
3.  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4.  $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

Contoh: Hitung

$$\sum_{k=1}^5 (3k^2 + 2)$$

Jawab:



$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (3k^2 + 2) &= 3 \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 2 = 3 \left( \frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6} \right) + (2+2+2+2+2) \\ &= 3(55) + 10 = 175\end{aligned}$$

### 1.4 Fungsi Transenden

#### 1. Fungsi Logaritma Asli

Fungsi logaritma asli (ln) didefinisikan sebagai:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

Maka turunan

$$D_x[\ln x] = D_x \left( \int_1^x \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x}$$

Secara umum, jika  $u = u(x)$  maka

$$D_x[\ln u] = D_x \left( \int_1^{u(x)} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Contoh:

Diberikan  $f(x) = \ln(4x^2 + 2)$  maka  $f'(x)$ ?

Jawab:

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 2} D_x(4x^2 + 2) = \frac{8x}{4x^2 + 2}$$

Jika  $y = \ln|x|, x \neq 0$

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & , x > 0 \\ \ln(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Untuk  $y = \ln x$  maka  $y' = \frac{1}{x}$

Untuk  $y = \ln(-x)$  maka  $y' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$



Maka  $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Sifat-sifat Ln:

1.  $\ln 1 = 0$
2.  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3.  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
4.  $\ln a^r = r \ln a$

**Contoh:** Hitung

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$$

Jawab:

Misal  $u = x^3 + 2$  maka  $du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx = \int \frac{x^2}{u} \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 2| + C$$

### 1.5 Fungsi Eksponen Asli

Invers dari fungsi logaritma natural disebut eksponen asli, notasi exp. Ditulis

$$y = \exp(x) \text{ atau } y = e^x$$

Definisi: Bilangan e adalah bilangan Real positif yang bersifat  $\ln e = 1$ .

Jadi

$$D_x(e^x) = e^x$$



Sehingga

$$\int e^x dx = e^x + C$$

### 1.6 Fungsi Eksponen Umum

Fungsi  $f(x) = a^x, a > 0$  disebut juga fungsi eksponen umum

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

Jika  $u = u(x)$ , maka

$$D_x(a^u) = a^u u' \ln a$$

Contoh:

Hitung turunan dari  $f(x) = 5^{\tan x}$

Jawab:

$$f'(x) = 5^{\tan x} \sec^2 x \ln 5$$

### Latihan

1. Sederhanakan nilai ln

- a.  $\ln \sqrt{x}$
- b.  $\ln 6$
- c.  $\ln 1.5$
- d.  $\ln 48$

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini

- a.  $Dx \ln(x^2 + 3x + \pi)$
- b.  $Dx \ln(x - 4)^3$
- c.  $Dx \ln \sqrt{3x - 2}$
- d.  $Dx e^{\sqrt{x}}$
- e.  $Dx e^{x^2 \ln x}$

3. Tentukan anti turunan dari fungsi-fungsi berikut ini

- a.  $\int \frac{5}{2x+7} dx$
- b.  $\int \frac{x}{10+x^2} dx$
- c.  $\int \frac{6v+9}{3v^2+9v} dv$