**Pertemuan 10 Interpolasi Lagrange dan Newton**

**Tujuan Pembelajaran:**

1. Mahasiswa dapat menggunakan metode Lagrange untuk melakukan interpolasi.
2. Mahasiswa dapat menuliskan polinom Newton berdasarkan ordenya dan sebaliknya dapat menyebutkan orde polinom.
3. Mahasiswa dapat melengkapi table selisih terbagi.
4. Mahasiswa dapat menggunakan polinom Newton untuk melakukan interpolasi.
5. Mahasiswa dapat menyebutkan kelebihan dan kekurangan dari metode polinom Newton jika dibandingkan dengan polinom Lagrange.

**POLINOM LAGRANGE**

Secara umum untuk titik n+1, persamaan polinom Lagrange dirumuskan



Berdasarkan persamaan diatas maka untuk interpolasi menggunakan 2 titik, persamaan polinom lagrange yang digunakan adalah



Buatlah polinom lagrange jika menggunakan 3 titik, tentukan pula yang menjadi 





Diberikan data berikut ini

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nilai x | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| y=f(x) | 0.04979 | 0.01832 | 0.00673 | 0.00248 |

Gunakan polinom interpolasi lagrange dengan 2 titik dan 3 titik untuk menghitung nilai x = 2.2

Data diatas adalah hasil perhitungan fungsi $y=e^{-2x}$, hitunglah nilai x = 2.2 sebenarnya dan tentukan erornya dari hasil perhitungan x=2.2 dengan menggunakan interpolasi lagrange 2 titik dan 3 titik.

Apa kelemahan metode Lagrange?

**POLINOM NEWTON**

Kelebihan polinom Newton adalah polinom yang terbentuk sebelumnya dapat digunakan untuk menghitung polinom pada orde selanjutnya.

Untuk orde = 0 polinom Newton dapat dituliskan sebagai $p\_{0}\left(x\right)=a\_{0}$

Untuk orde = 1 polinom Newton dapat dituliskan sebagai $p\_{1}\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}(x-x\_{0})$ atau

 $p\_{1}\left(x\right)=p\_{0}(x)+a\_{1}(x-x\_{0})$

Untuk orde = 2 polinom Newton dituliskan sebagai $p\_{2}\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}\left(x-x\_{0}\right)+a\_{2}\left(x-x\_{0}\right)\left(x-x\_{1}\right)$

atau dapat dituliskan menjadi : $p\_{2}\left(x\right)=p\_{1}\left(x\right)+a\_{2}\left(x-x\_{0}\right)\left(x-x\_{1}\right)$

Untuk orde = 3 polinom Newton dituliskan jadi: $p\_{3}\left(x\right)=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

atau dapat dituliskan menjadi : $p\_{3}\left(x\right)=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

sehingga untuk orde = n maka : $p\_{n}\left(x\right)=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

atau dapat dituliskan menjadi : $p\_{n}\left(x\right)=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

Dimana, nilai $a\_{0}=f(x\_{0})$, $a\_{1}=f\left[x\_{1},x\_{0}\right]$, $a\_{2}=f\left[x\_{2},x\_{1},x\_{0}\right]$ maka $a\_{3}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

dan $a\_{n}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$.

Fungsi $f\left[x\_{1},x\_{0}\right]$, $f\left[x\_{2},x\_{1},x\_{0}\right]$, $f\left[x\_{3},x\_{2},x\_{1},x\_{0}\right]$ dst. disebut dengan **Fungsi Selisih Terbagi**. Fungsi ini didefinisikan sebagai

1. $ f\left[x\_{1},x\_{0}\right]=\frac{f(x\_{1})-f(x\_{0})}{x\_{1}-x\_{0}}$ dan jika akan menghitung $f\left[x\_{2},x\_{1}\right]=\frac{f(x\_{2})-f(x\_{1})}{x\_{2}-x\_{1}}$ maka jika

 $f\left[x\_{3},x\_{2}\right]=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$ dan $f\left[x\_{4},x\_{3}\right]=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

1. $ f\left[x\_{2},x\_{1},x\_{0}\right]=\frac{f[x\_{2},x\_{1}]-f[x\_{1},x\_{0}]}{x\_{2}-x\_{0}}=\frac{\frac{f(x\_{2})-f(x\_{1})}{x\_{2}-x\_{1}}-\frac{f(x\_{1})-f(x\_{0})}{x\_{1}-x\_{0}}}{x\_{2}-x\_{0}}$
2. $f\left[x\_{3},x\_{2},x\_{1}\right]=\frac{f[x\_{3},x\_{2}]-f[x\_{2},x\_{1}]}{x\_{3}-x\_{1}}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Sehingga $f\left[x\_{3},x\_{2},x\_{1},x\_{0}\right]= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

Untuk memudahkan penghitungan nilai fungsi terbagi maka dapat disusun terlebih dahulu table selisih terbagi. Tabel bisa dilihat sebagai berikut: (Lengkapi tabel yang kosong)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | $$f(x\_{i})$$ | ST-1 | ST-2 | ST-3 | ST-4 |
| $$x\_{0}$$ | $$f(x\_{0})$$ | $$f[x\_{1},x\_{0}]$$ | \_\_\_\_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| $$x\_{1}$$ | $$f(x\_{1})$$ | $$f[x\_{2},x\_{1}]$$ | $$f[x\_{3},x\_{2},x\_{1}]$$ | $$f[x\_{4},x\_{3},x\_{2},x\_{1}]$$ |  |
| $$x\_{2}$$ | $$f(x\_{2})$$ | $$f[x\_{3},x\_{2}]$$ | $$f[x\_{4},x\_{3},x\_{2}]$$ |  |  |
| $$x\_{3}$$ | $$f(x\_{3})$$ | \_\_\_\_\_\_\_\_ |  |  |  |
| $$x\_{4}$$ | $$f(x\_{4})$$ |  |  |  |  |

**Penerapan Interpolasi Newton**

Menggunakan data yang sama untuk menaksir nilai f(2.2) dari kasus interpolasi Lagrange hitunglah tabel selisih terbagi berikut ini

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | $$f(x\_{i})$$ | ST-1 | ST-2 | ST-3 |
| 1.5 | 0.04979 | -0.06294 |  |  |
| 2 | $$0.01832$$ |  |  |  |
| 2.5 | 0.00673 |  |  |  |
| 3 | 0.00248 |  |  |  |

Jika menggunakan interpolasi 3 titik maka $x\_{0}=1.5, x\_{1}=2$ dan $x\_{2}=2.5$ maka

$f\left[x\_{1},x\_{0}\right]=\frac{f(x\_{1})-f(x\_{0})}{x\_{1}-x\_{0}}=\frac{0.01832-0.04979}{2-1.5}=$-0.06294 ,

Hitung pula untuk $f[x\_{2},x\_{1}]$ dan $f[x\_{3},x\_{2}]$ untuk diisi pada tabel diatas

$f[x\_{3},x\_{2},x\_{1}]$=$ \frac{f[x\_{3},x\_{2}]-f[x\_{2},x\_{1}]}{x\_{3}-x\_{1}}$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Hitung pula untuk $f\left[x\_{2},x\_{1},x\_{0}\right]$dan $f\left[x\_{3},x\_{2},x\_{1}, x\_{0}\right]$ untuk diisi pada tabel diatas

Jika menggunakan 3 titik $x\_{0}=1.5, x\_{1}=2$ dan $x\_{2}=2.5$ maka polinom Newton menjadi:

$$p\_{2}\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}\left(x-x\_{0}\right)+a\_{2}\left(x-x\_{0}\right)(x-x\_{1})$$

Untuk $p\_{2}\left(2.2\right)=0.04979+(-0.06294)\left(2.2-1.5\right)+\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_=$

Hitunglah jika dilakukan interpolasi menggunakan 4 titik untuk menghitung f(2.2)

Bagaimana jika dilakukan interpolasi menggunakan 2 titik yaitu $x\_{0}=2$ dan $x\_{1}=2.5$ maka menggunakan tabel selisih terbagi diatas yang menjadi $a\_{0}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$ dan $a\_{1}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$ sehingga menggunakan $p\_{1}\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}\left(x-x\_{0}\right) $diperoleh nilai

$p\_{1}\left(x\right)=0.01832+\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Jika digunakan $x\_{0}=2$, $x\_{1}=2.5$ dan $x\_{2}=3$. Hitung kembali nilai taksiran untuk f(2.2)

**Perbandingan Lagrange dengan Newton**

Berdasarkan apa yang telah dipaparkan maka tuliskan kelebihan dari Metode Newton jika dibandingkan dengan metode Lagrange ?

Coba amati tabel selisih terbagi. Adakah kekurangan dari metode Newton? (Amati apa yang terjadi jika ada dua nilai f(x) bernilai sama)

**Tabel selisih terbagi**

Dapat digunakan script pada Scilab untuk menghitung interpolasi dan tabel selisih terbagi. Berikut akan dibuat script untuk memunculkan tabel selisih terbagi. Lengkapi script berikut!

function **T**=tabelST(**x**, **f**)

 *//x = vektor baris dari nilai-nilai variabel x*

 *//f = vektor baris dari nilai-nilai fungsi di x*

 [m,n]=size (**f**);

 *//Asumsi ukuran x sama dengan f*

 A(:,1)=**f**';

 for j = 1 : n-1

 for i = 1: \_\_\_\_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 end

 end

 **T**=[**x**' A];

Endfunction

**Command Window**

--> x=[1 1.5 2 2.5 3]

--> f=[0.04979 0.01832 0.00673 0.00248]

--> T=tabelST(x,f)