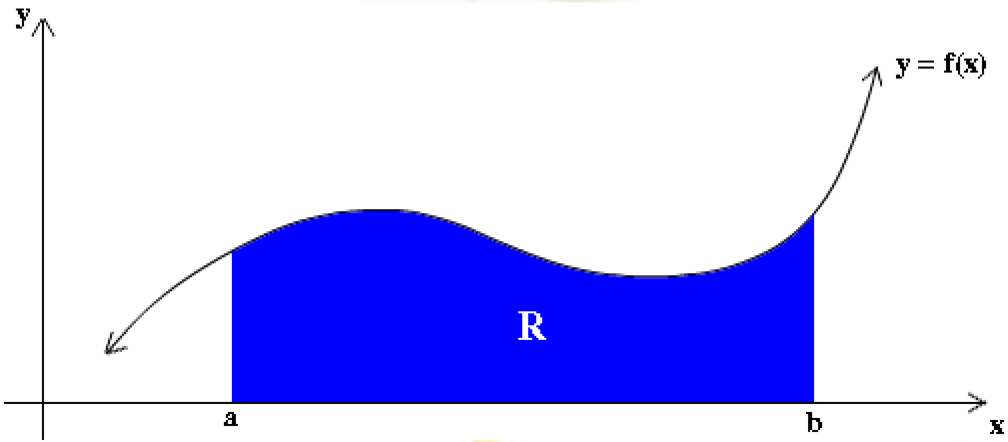
Integral Tentu

Matematika Dasar II

Integral Riemann

Integral tentu dikonstruksi dengan jumlah Riemann yang menggambarkan luas daerah. Misal fungsi f(x) terdefinisi pada selang tutup [a,b].

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

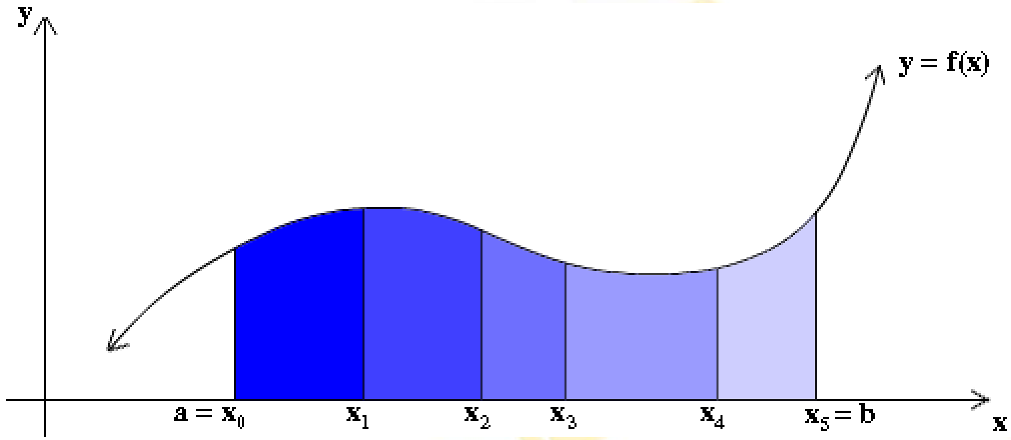


Langkah –Langkah Integral Riemann

Partisikan selang [a,b] menjadi n selang dengan titik pembagian

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

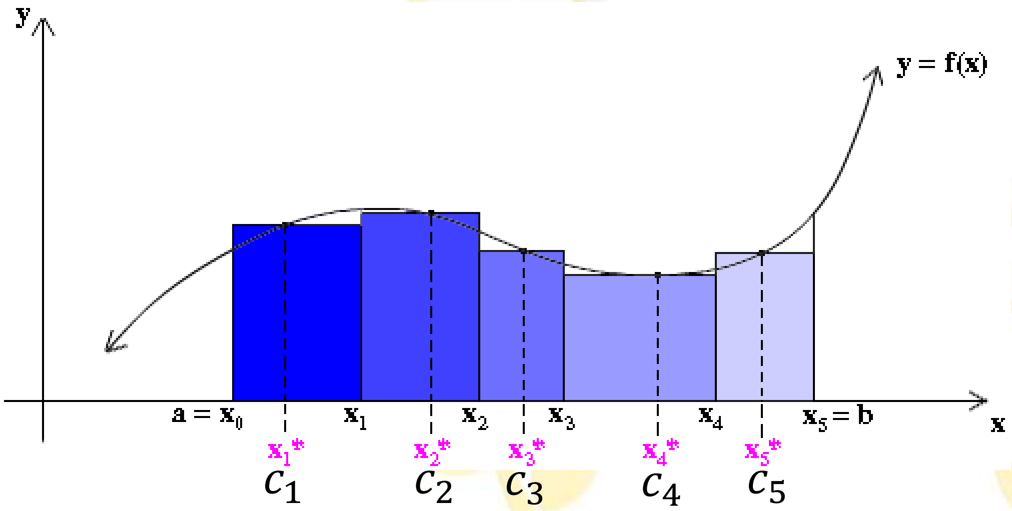
$P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ disebut partisi dari [a,b]



Langkah –Langkah Integral Riemann

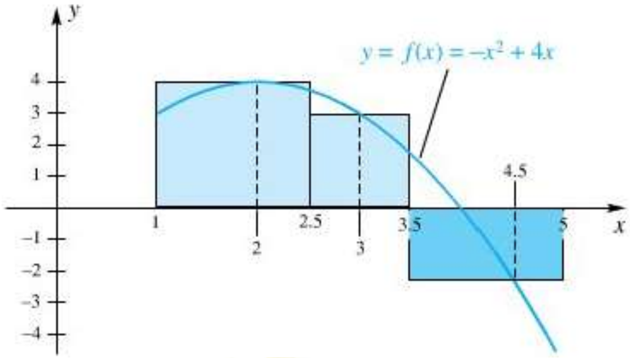
Definisikan panjang partisi P, sebagai $\|P\| = \underset{1 \le i \le n}{Maks} |\Delta x_k|$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Pilih $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, …, n



Latihan

Hitunglah luas daerah berikut ini



Langkah –Langkah Integral Riemann

Bentuk jumlah Riemann: $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$

Jika $\|P\| \to 0$ maka diperoleh limit jumlah Riemann

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan Riemann pada selang [a,b] dan ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Contoh

$\int_{-2}^{3}(x+3)dx$, Partisi interval [-2,3]. Jika dibagi sama besar maka $\Delta x = 5/n$. Untuk setiap selang digunakan titik tengah $\overline{x_i}$=x_i. Maka

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3$$

Karena $f(x_i) = x_i + 3 = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) + 3 = 1 + i\left(\frac{5}{n}\right)$

Sifat dan Rumus Sigma

$$\sum_{i=1}^{n}(ka_i + lb_i) = k\sum_{i=1}^{n} a_i + l\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n+1)}{30}$$

Contoh

Karena $f(x_i) = x_i + 3 = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) + 3 = 1 + i\left(\frac{5}{n}\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n}$$

$$= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Jika Δx diperkecil maka sama dengan n semakin besar, sehingga

$$\int_{-2}^{3} (x+3)dx = \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{35}{2}$$

Latihan

Hitunglah $\int_{-2}^{1}(x^2 + 1)$ dengan menggunakan penjumlahan Riemann

Sifat-sifat Integral tentu

Andaikan bahwa *f* dan *g* terintegralkan pada [a,b] dan bahwa *k* konstanta. Maka *kf* dan $f + g$ adalah terintegralkan dan

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. Jika $a < b < c$, maka $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. Jika f(x) ganjil dan a adalah konstanta, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
6. Jika f(x) genap dan a adalah konstanta, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Teorema Dasar Kalkulus II

Misal f(x) kontinu pada [a,b] dan f(x) suatu anti turunan dari F(x). Maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh: Selesaikan integral tentu $\int_0^2 x^2 dx$

Jawab:

Berdasarkan soal di atas $f(x) = x^2$, dan diketahui bahwa anti turunannya $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Maka

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}2^3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3\right] = \frac{8}{3}$$

Latihan

Gunakan teorema dasar kalkulus untuk menghitung tiap integral tentu

a) $\int_{-1}^{2}(3x^2 - 2x - 3)dx$

b) $\int_{1}^{7}\frac{1}{\sqrt{2t+2}}dt$

c) $\int_{-1}^{1}(x^2+2)dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\, dx$

Hitung $\int_0^5 f(x)dx$ memakai rumus luas yang cocok dari geometri bidang. Mulai dengan menggambarkan grafik fungsi yang diberikan.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{jika } 1 \le x \le 3 \\ x - 4 & \text{jika } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{jika } 0 \le x < 2 \\ 6 - x & \text{jika } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Teorema Dasar Kalkulus I

Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan andaikan x sebuah titik dalam [a,b]. Maka $D_x\left[\int_a^x f(u)du\right] = f(x)$

Secara umum

$$D_x\left[\int_a^{v(x)} f(u)du\right] = f\big(v(x)\big)v'(x)$$

$$D_x\left[\int_{v(x)}^{w(x)} f(u)du\right] = f\big(w(x)\big)w'(x) - f\big(v(x)\big)v'(x)$$

Contoh: Hitung f'(x) dari $f(x) = \int_4^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$

Jawab: $f'(x) = \sqrt{1+x^4}(2x)$

Latihan

Cari $F'(x)$

1. $F(x) = \int_{-6}^{x} (2z + 1)dz$
2. $F(x) = \int_{x}^{2x} (sin^4 t)(tan\, t)dt,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$