

DISTRIBUSI POISSON

(Distribusi Probabilitas Diskrit)

Kapan distribusi Poisson digunakan??

Jika parameter n sangat besar (lebih dari 50) sedangkan p kecil sekali (kurang dari 0,1) → Sulit menggunakan pendekatan binomial

Pendekatan Binomial - Poisson

Fungsi distribusi peluang binomial dapat ditulis:

$$\begin{aligned} b(x; n, p) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Jika dilakukan transformasi $p = \mu/n$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} b(x; n, p) &= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} \\ &= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) = 1, \end{aligned}$$

Pendekatan Binomial - Poisson

Dari definisi bilangan natural e , diperoleh hubungan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{1}{(-n)/\mu} \right]^{-\mu} \right\}^{-\mu} = e^{-\mu}.$$

Dengan memperhatikan syarat limit, diperoleh:

$$b(x; n, p) \rightarrow \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!},$$

dimana $x=0, 1, 2, \dots$, yaitu sebuah distribusi poisson
untuk $\mu = \alpha$ (rata-rata jumlah sukses=rata-rata kedatangan).

Percobaan Poisson:

Jika suatu percobaan menghasilkan variabel random X yang menyatakan banyak-nya sukses dalam daerah tertentu atau selama interval waktu tertentu, percobaan itu disebut percobaan Poisson.

Ciri-ciri distribusi poisson

1. Banyaknya percobaan yang terjadi dalam suatu interval waktu atau suatu daerah tertentu tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada interval waktu atau daerah lain yang terpisah
2. Probabilitas hasil percobaan yang terjadi selama suatu interval waktu yang singkat atau daerah yang kecil, sebanding dengan panjangnya waktu atau besarnya daerah tersebut dan tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi diluar waktu atau daerah tersebut
3. Probabilitas lebih dari satu hasil percobaan yang terjadi dalam interval waktu yang singkat atau dalam daerah yang kecil dapat diabaikan.

Distribusi Poisson

- Jumlah X dari keluaran yang terjadi selama satu percobaan Poisson disebut Variabel random Poisson, dan distribusi probabilitasnya disebut distribusi Poisson.
- Bila x menyatakan banyaknya sukses yang terjadi, λ adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dalam interval waktu atau daerah tertentu, dan $e = 2,718$, maka rumus distribusi Poisson adalah :

$$P(x) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$$

Atau

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Dimana: $P(x)$ = probabilitas kelas sukses

μ / λ = rata-rata keberhasilan = $n \cdot p$

x = Banyaknya unsur berhasil dalam sampel
atau variable random diskrit

e = Konstanta = 2,7182

n = jumlah/ukuran populasi

t = banyaknya satuan waktu

Probabilitas Proses Poisson

Probabilitas terjadinya suatu kedatangan yang mengikuti proses poisson, dirumuskan :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$$

Keterangan :

λ = tingkat kedatangan rata-rata per satuan waktu

t = banyaknya suatu waktu

x = banyaknya kedatangan dalam t satuan waktu

Contoh Soal

Banyaknya sambungan telepon ke nomor 108 Antara pukul 23.00-00.00 selama 1 bulan berdistribusi Poisson dengan rata-rata 5 sambungan per hari. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan peluang bahwa terdapat 10 sambungan pada hari tertentu saat rentang waktu tertentu!

Diketahui :

$$\lambda = 5; x = 10$$

$$P(x = 10) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{(2.71828)^{-5} \cdot 5^{10}}{10!} = \frac{65800.48497}{3628800} = 0.0181$$

Contoh Soal

Sebuah toko perlengkapan sekolah menjelang tahun ajaran baru mencatat rata-rata penjualan sepatu setiap harinya 20 buah. Jika permintaan sepatu mengikuti distribusi poisson berapa probabilitas untuk penulana berikut:

- 10 Sepatu
- 30 Sepatu

Diketahui :

$$\lambda = 20;$$

- x=10

$$P(x = 10) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{(2.71828)^{-20} \cdot 20^{10}}{10!} = 0.0058164$$

- x=30

$$p(x = 30) = \frac{(2.71828)^{-20} \cdot 20^{30}}{30!} = 0.1836$$

Contoh Soal

Ruang gawat darurat sebuah rumah sakit memiliki tingkat kedatangan rata-rata pasien sebanyak 4 orang per hari. Kedatangan pasien mengikuti Poisson.

- Berapa probabilitas kedatangan 2 pasien per hari?
- Berapa probabilitas kedatangan 2 pasien sampai pada siang hari saja?

Diketahui :

$$T= 1; \lambda = 4 ;x=2$$

- 2 pasien perhari ($x=2$)

$$P(x=2) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} = \frac{(2.71828)^{-4 \cdot 1}(4 \cdot 1)^2}{2!} = \frac{(0.018)x(16)}{2} = 0.1465$$

- 2 pasien sampai pada siang hari ($x=2 \rightarrow t=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$)

$$P(x=2) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} = \frac{(2.71828)^{-4 \cdot \frac{1}{2}}(4 \cdot \frac{1}{2})^2}{2!} = \frac{(0.135)x(4)}{2} = 0.271$$

Probabilitas Poisson Kumulatif

Jika terdapat probabilitas poisson yang lebih dari satu, maka probabilitas tersebut dinamakan dengan probabilitas poisson kumulatif

$$\begin{aligned} PPK &= \sum_{x=0}^n \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \sum_{x=0}^n P(X = x) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n) \end{aligned}$$

Contoh Soal

Berdasarkan pengalaman, setiap mencetak 10.000 lembar kertas terdapat 100 lembar yang rusak. Pada suatu waktu perusahaan mencetak 1000 lembar kertas. Hitunglah probabilitanya:

- Tepat mendapat 5 lembar kertas yang rusak.
- Mendapatkan paling banyak 2 lembar kertas yang rusak.
- Paling sedikit mendapat 2 kertas yang rusak.

Diketahui:

Probabilitas mendapatkan kertas yang rusak

$$p = \frac{100}{10000} = 0.01$$

$$n = 1000$$

$$\lambda = 1000 \times 0.01 = 10$$

$$a. P(x = 5) = \frac{2.71828^{-10} \cdot 10^5}{5!} = 0.037834$$

$$b. P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$

$$c. P(x \geq 2)$$

TUGAS

1. Diketahui rata-rata pemberangkatan mobil pada salah satu perusahaan travel yang dibatalkan adalah 5 kali perbulan. Berapakah peluang pada bulan depan pemberangkatan mobil dibatalkan sebanyak 7 kali?
2. Sebuah restoran memiliki tingkat kedatangan rata-rata pengunjung sebanyak 10 orang per jam. Restoran buka pukul 10.00. Kedatangan pengunjung mengikuti proses poisson. Berapa probabilitas kedatangan pengunjung tepat satu pelanggan pada pukul 10.30!
3. Sebuah toko perlengkapan sekolah menjelang tahun ajaran baru mencatat rata-rata penjualan sepatu setiap harinya 20 buah. Jika permintaan sepatu mengikuti distribusi poisson berapa probabilitas untuk penjualan berikut:
 - a. Tentukan probabilitas penjualan paling banyak 5 sepatu!
 - b. Tentukan probabilitas paling sedikit 15 sepatu!

SELESAI