

PROGRAMA LINIER

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL
Pertemuan Ke-2

Riani Lubis
Program Studi Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

Apa itu Program Linier ?

- Suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumberdaya yang terbatas, diantara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan.
- Merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumberdaya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal seperti memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya.
- Salah satu model *Operations Research* yang menggunakan teknik optimisasi matematika linear di mana seluruh fungsi harus berupa fungsi matematika linear.

Formulasi Model Programa Linier

- Masalah keputusan yang sering dihadapi adalah alokasi optimum sumberdaya yang langka.
- Sumberdaya : uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan, teknologi, dll.
- Tujuan : mencapai hasil terbaik yang mungkin dicapai dengan keterbatasan sumberdaya yang ada
 - Maksimasi : profit, penjualan, kesejahteraan
 - Minimasi : biaya, waktu, jarak
- Karakteristik dalam programa linier :
 1. Variabel Keputusan
 2. Fungsi Tujuan
 3. Fungsi Kendala/Pembatas

Variabel Keputusan (1)

- Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat dan akan mempengaruhi nilai tujuan yang hendak dicapai.
- Caranya, ajukan pertanyaan :
“Keputusan apa yang harus dibuat agar nilai fungsi tujuan menjadi maksimum atau minimum”
- Contoh :
 1. Berapa **banyak produk harus dikirim** dari gudang K ke gudang L agar biaya pengiriman total minimum ?
 2. Saham mana yang harus dibeli dan **berapa banyak saham harus dibeli** agar tingkat kembalian total maksimum ?

Fungsi Tujuan

- Fungsi Tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan **dimaksimumkan** (biasanya untuk pendapatan atau keuntungan) atau **diminimumkan** (biasanya untuk ongkos/biaya).
- Dalam programa linier, tujuan yang hendak dicapai harus diwujudkan ke dalam sebuah fungsi matematika linier.
- Contoh :
 - Memaksimumkan laba perusahaan
 - Meminimumkan biaya persediaan
 - Maksimasi : $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$
 - Minimasi : $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Fungsi Kendala/Pembatas (1)

- Pembatas merupakan kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga-harga variabel keputusan secara sembarang.
- Ada tiga macam kendala :
 - 1. Kendala berupa pembatas (\leq)**

Mengendalikan ruas kiri agar tidak lebih besar dari ruas kanannya
 - 2. Kendala berupa syarat (\geq)**

Mengendalikan ruas kiri agar tidak lebih kecil daripada nilai ruas kanannya
 - 3. Kendala berupa keharusan ($=$)**

Mengendalikan nilai ruas kiri agar nilainya sama dengan nilai ruas kanannya.

Contoh 1

PT. Sayang anak memproduksi dua jenis mainan yang terbuat dari kayu (boneka kayu & kereta api kayu). Untuk membuat kedua mainan tersebut, diperlukan dua kelompok tenaga kerja (tukang kayu & tukang poles).

| | Boneka Kayu | Kereta Api Kayu |
|------------------------|---|---|
| Harga jual | Rp. 27.000 per lusin | Rp. 21.000 per lusin |
| Biaya material | Rp. 10.000 per lusin | Rp. 9.000 per lusin |
| Biaya tenaga kerja | Rp. 14.000 per lusin | Rp. 10.000 per lusin |
| Waktu proses per lusin | <ul style="list-style-type: none">• 2 jam pemolesan• 1 jam pengerjaan kayu | <ul style="list-style-type: none">• 1 jam pemolesan• 1 jam pengerjaan kayu |

- Jam kerja yang tersedia :
 - 100 jam/minggu untuk pemolesan
 - 80 jam/minggu untuk pekerjaan kayu
- Hasil pengamatan pasar :
 - Kebutuhan akan Kereta Api tidak terbatas
 - Kebutuhan Boneka, tidak lebih dari 40 lusin yang terjual setiap minggu

Bagaimanakah formulasi dari persoalan di atas untuk mengetahui berapa lusin setiap jenis mainan masing-masing harus dibuat setiap minggu agar diperoleh keuntungan yang maksimum ?

- **Variabel keputusan :**

- X_1 = banyaknya boneka yang dibuat setiap minggu
- X_2 = banyaknya kereta api yang dibuat setiap minggu

- **Fungsi tujuan :**

Diketahui bahwa

$$\text{Pendapatan/minggu} = 27 X_1 + 21 X_2$$

$$\text{Ongkos material/minggu} = 10 X_1 + 9 X_2$$

$$\text{Ongkos tenaga kerja/minggu} = 14 X_1 + 10 X_2$$

Maka fungsi tujuannya adalah :

- Memaksimumkan

$$\begin{aligned} Z &= (27 X_1 + 21 X_2) - (10 X_1 + 9 X_2) - (14 X_1 + 10 X_2) \\ &= 3 X_1 + 2 X_2 \end{aligned}$$

- **Pembatas :**

1. Setiap minggu tidak lebih dari 100 jam waktu pemolesan yang dapat digunakan $\rightarrow 2 X_1 + X_2 \leq 100$
2. Setiap minggu tidak lebih dari 80 jam waktu pengerjaan kayu yang dapat digunakan $\rightarrow X_1 + X_2 \leq 80$
3. Karena permintaan yang terbatas, maka tidak lebih dari 40 lusin boneka yang dapat dibuat setiap minggu. Jumlah material yang dapat digunakan diasumsikan tidak terbatas sehingga tidak ada pembatas untuk hal ini $\rightarrow X_1 \leq 40$

- **Pembatas tanda :**

- Kedua variabel keputusan harus berharga positif :

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

- **Formulasi :**

Variabel Keputusan :

X_1 = banyaknya boneka yang dibuat setiap minggu

X_2 = banyaknya kereta api yang dibuat setiap minggu

Fungsi Tujuan :

Maksimasi $Z = 3 X_1 + 2 X_2$

Fungsi Pembatas :

$$2 X_1 + X_2 \leq 100$$

$$X_1 + X_2 \leq 80$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Contoh 2

Perusahaan kaca WYNDOR memproduksi kaca dengan kualitas tinggi, termasuk jendela dan pintu.

Perusahaan tersebut mempunyai 3 departemen :

- Departemen 1 : membuat rangka aluminium dan perkakas logam
- Departemen 2 : membuat rangka kayu
- Departemen 3 : membuat kaca dan merakit sebuah produk

Karena terjadi penurunan pendapatan, maka pihak atasan memutuskan untuk menghentikan produk yang tidak mendatangkan keuntungan & menentukan kapasitas produksi untuk membuat dua produk baru yang dinilai mempunyai potensi pasar tinggi.

Produk tersebut adalah :

- Produk 1 : pintu kaca dengan rangka aluminium
- Produk 2 : rangka rangkap jendela dari kayu

Produk 1 membutuhkan proses di Departemen 1 dan 3. Produk 2 membutuhkan proses di Departemen 2 dan 3. Bagian Pemasaran berpendapat bahwa perusahaan dapat menjual setiap produk sebanyak jumlah produk yang dapat diproduksi oleh departemen-departemen tersebut.

Maka perlu menentukan **rata-rata produksi kedua produk** tersebut supaya **keuntungan yang diperoleh dapat maksimal**, tetapi disesuaikan dengan kapasitas produksi yang tersedia di tiga departemen yang ada. Diasumsikan bahwa tiap produk akan diproduksi dengan satuan batch (20 unit), sehingga rata-rata produksi diartikan sebagai jumlah batch yang dihasilkan tiap minggunya.

Identifikasi yang harus dikumpulkan :

1. Jumlah jam produksi yang tersedia tiap minggu di setiap departemen
2. Jumlah waktu produksi yang digunakan untuk memproduksi setiap batch produk baru di setiap departemen
3. Keuntungan tiap batch produk baru.

Jika diasumsikan :

X_1 = jumlah batch produk 1 tiap minggu

X_2 = jumlah batch produk 2 tiap minggu

Z = total keuntungan tiap minggu (dalam satuan ribuan dolar) hasil produksi kedua produk.

Data permasalahan Wyndoor Glass Co.

| Departemen | Waktu Produksi per Batch, Jam | | Waktu Produksi Tersedia per Minggu, Jam |
|----------------------|-------------------------------|---------|---|
| | Produk | | |
| | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 12 |
| 3 | 3 | 2 | 18 |
| Keuntungan per Batch | \$ 3000 | \$ 5000 | |

Maka diperoleh :

- Variabel keputusan :

X_1 = jumlah produk 1 yang harus diproduksi

X_2 = jumlah produk 2 yang harus diproduksi

- Tujuannya/Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } z = 3 X_1 + 5 X_2$$

- Pembatas/Batasan :

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Formulasi Umum Program Linier :

| aktivitas sumber | Penggunaan sumber/unit | | | | Banyaknya sumber yang dapat digunakan |
|--------------------------------|------------------------|----------|-----|----------|---------------------------------------|
| | 1 | 2 | ... | n | |
| 1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1n} | b_1 |
| 2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2n} | b_2 |
| . | | | . | | . |
| . | | | . | | . |
| . | | | . | | . |
| m | a_{m1} | a_{m2} | ... | a_{mn} | b_m |
| $\Delta z/\text{Unit Tingkat}$ | c_1 | c_2 | ... | c_n | |
| | x_1 | x_2 | ... | x_n | |

F. Tujuan : Maksimasi $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

.....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

dan $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$