|  |
| --- |
| **1**    **SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |
| 1. Mengetahui sifat-sifat dan operasi matriks 2. Mengetahui bentuk – bentuk penyelesaian sistem persamaan linear. 3. Menggunakan operasi baris elementer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan menentukan invers dari suatu matriks |

**Materi:**

* 1. **Bentuk Umum Matriks**

**Definisi 1.1** Matriks adalah suatu susunan banjar (*array*) bilangan-bilangan dalam bentuk segi empat, dengan jumlah baris sebanyak *m* dan jumlah kolom sebanyak *n*.

dinotasikan dengan

 atau dapat ditulis secara ringkas dengan 

Baris jumlahnya *m*

Kolom jumlahnya *n*

dimana *i* =1,...,*m* dan *j* =1,...,*n* , adalah elemen matriks *A* pada baris ke-*i­* dan kolom ke-*j*. Ukuran (dimensi/ordo) matriks *A* diatas adalah *m*x*n*.

**Contoh 1.1**:



✍ Tentukan dimensi dari matriks berikut dan tentukan elemen dari matriks berikut ini 

**Definisi 1.2** Kesamaan dua matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika dimensi kedua matriks sama dan elemen-elemen seletaknya sama.

✍ Berikan dua contoh matriks yang sama

* 1. **Operasi dan Sifat Matriks**

**Definisi 1.3** Operasi Matriks

1. Jika dan  masing-masing adalah matriks *m*x*n*, maka adalah matriks *m*x*n* yang elemen ke-*ij* adalah .
2. Jika *A* adalah matriks *m*x*n*, *α* adalah suatu skalar maka *αA* adalah matriks yang dibentuk dari perkalian setiap elemen *A* dengan *α*.
3. Jika *A* dan *B* adalah matriks *m*x*n* maka  adalah matriks *m*x*n* yang dapat dituliskan dari .
4. Jika *A* matriks *m*x*r* dan *B* matriks *r*x*n* maka hasil kali A.B=C adalah matriks *m*x*n* yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut:



**Contoh 1.2:**

Misalkan diketahui ,

Tentukan :

1. *A*+*B*
2. α*A*, dimana α adalah skalar
3. *A*-*B*
4. *A*.*B*

**Penyelesaian**

a. ****

b. 

c. 

d. 

✍**Latihan 1.1** Selesaikan soal berikut ini



1. Tentukan matriks 2C
2. Tentukan matriks *A*+*B*, periksalah apakah matriks yang diperoleh sama dengan matriks *B*+*A*
3. Tentukan matriks *A*-*B*, periksa pula matriks *B*-*A*! Apa kesimpulan yang dapat diambil?
4. Tentukan matriks AB, BA, AC, CA. Apakah semua matriks tersebut dapat ditentukan nilai elemen-elemennya? Apa syarat agar dua matriks dapat dikalikan?

**Teorema 1.1**

Untuk setiap skalar α, β dan untuk setiap matriks *A,B* dan *C* dimana operasi-operasi yang bersangkutan terdefinisi maka berlaku :

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

Bukti dapat dilihat di *Howard Anton, Aljabar Linear Elementer*

* 1. **Beberapa Matriks Istimewa**

1. Matriks berukuran 1x*n* disebut **vektor baris**, matriks berukuran *m*x1 disebut **vektor kolom**.

**Contoh 1.3**:

**** *P* adalah vektor baris dan *Q* adalah vektor kolom.

1. **Matriks bujur sangkar** berorde *n* jika jumlah baris dan kolom matriks sama yaitu *n* buah.

**Contoh 1.4**:

****

1. Jika *A* matriks bujur sangkar maka elemen disebut elemen diagonal dari *A*, dan elemen-elemen lain merupakan elemen diluar diagonal *A*.

**Contoh 1.5**:

 maka adalah elemen diagonal dan yang lainnya elemen –elemen diluar diagonal *A*.  disebut juga diagonal utama.

1. Jika *A* matriks bujur sangkar dan semua elemen diluar diagonal *A* maka matrik *A* disebut **matriks diagonal**.

**Contoh 1.6:**

 

1. Jika *A* matriks bujur sangkar dan elemen  dimana adalah suatu skalar sedangkan semua elemen diagonal *A* maka matriks *A* disebut **matriks skalar**.

**Contoh 1.7:**



1. Jika *A* adalah matriks skalar dimana , maka matriks *A* disebut **matriks identitas**, matriks *A* dapat ditulis dengan .

**Contoh 1.8:**



1. Jika A adalah matriks dimana semua elemennya bernilai 0 maka A disebut matriks null, sering dituliskan dengan matriks .

**Contoh 1.9:**



1. Jika *A* matriks bujur sangkar dimana semua elemen diatas diagonal utama adalah nol maka *A* disebut **matriks segitiga bawah**.

**Contoh 1.10:**



1. Jika *A* matriks bujur sangkar dimana semua elemen dibawah diagonal utama adalah nol maka *A* disebut **matriks segitiga atas**.

**Contoh 1.11:**



* 1. **Transpose dari Suatu Matriks**

**Definisi 1.4**

Jika *A* adalah matriks *m*x*n* maka transpos *A* (ditulis *AT*) adalah matriks berukuran *n*x*m* yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dengan kolom dari *A*.  dan . Jika *A* matriks bujur sangkar dan maka *A* adalah **matriks simetri**.

**Contoh 1.12:**

**** 

Dari contoh matriks *B* adalah matriks simetri

**Teorema 1.2**

*A,B* adalah matriks *m*x*n* dan α adalah skalar maka berlaku sifat:

1. 
2. 
3. 

**Definisi 1.5**

Jika *A* adalah matriks bujur sangkar maka trace *A* (ditulis *tr*(*A*)) didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota dari diagonal utama matriks *A*. Trace *A* tidak terdefinisi jika *A* bukan matriks bujur sangkar.

✍ **Latihan 1.2** Diketahui matriks-matriks berikut ini :



Sederhanakan matriks berikut ini jika mungkin

* 1. **Sistem Persamaan Linear**

**Definisi 1.6**

Secara umum sebuah persamaan linear dengan *n* variabel  dapat dituliskan sebagai suatu persamaan linear dalam bentuk



Dengan  dan konstanta real.

✍ **Latihan 1.3**

Tentukan persamaan berikut yang merupakan persamaan linear :

1.  d. 
2.  e. 
3.  f. 

**Definisi 1.7**

Sebuah himpunan terhingga *m* buah persamaan linear dengan variabel disebut sistem persamaan linear dengan *n* variabel dituliskan sebagai



Suatu urutan bilangan-bilangan disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika  memenuhi setiap persamaan dalam sistem tersebut.

**Contoh 1.13:** Sistem persamaan linear

✍ Tentukan jumlah variabel dan banyak persamaan dari sistem persamaan disamping (*m* dan *n*)



**Definisi 1.8**

Sistem persamaan yang **tidak** mempunyai penyelesaian disebut sistem yang *tak konsisten* sedangkan jika **minimal terdapat satu** penyelesaian maka sistem tersebut disebut *konsisten*.

*Setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian.*

✍ **Latihan 1.4** Periksalah ketiga sistem persamaan berikut dan gambarkan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut dalam koordinat kartesian. Tentukan sistem persamaan yang mempunyai tepat satu penyelesaian, tak hingga atau tidak mempunyai penyelesaian



**Definisi 1.9**

Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* jika semua konstantanya nol, yaitu jika sistem tersebut mempunyai bentuk :

 

Setiap sistem homogen mempunyai sifat konsisten, karena semua sistem seperti itu mempunyai penyelesaian . Penyelesaian ini disebut penyelesaian *trivial*. Jika ada penyelesaian lain yang memenuhi sistem persamaan tersebut maka penyelesaian sistemnya disebut penyelesaian *tak-trivial*.

**Contoh 1.14:**

1.  b) 

Tunjukkan bahwa a) memiliki penyelesaian trivial dan b) memiliki penyelesaian tak-trivial.

**Definisi 1.10**

Sistem *m* persamaan linear dengan *n* buah variabel dapat diubah dalam bentuk matrik yang diperbanyak (*augmented matrix*) yang dituliskan sebagai:

 ⇨ 

✍ **Contoh 1.5**

Buatlah *augmented matrix* dari sistem persamaan linear berikut:

Jawab:

1. (b)

Keterangan:

1. Perubahan SPL menjadi perkalian matriks
2. Membuat menjadi matriks diperluas
   1. **Eliminasi Gaussian**

Penyelesaian sistem persamaan dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE) pada matriks yang diperbanyak. Metode dasar dari OBE adalah dengan menggantikan sistem yang diberikan dengan suatu sistem baru yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama tetapi lebih mudah diselesaikan.

**Definisi 1.11**

Tiga langkah yang digunakan dalam OBE adalah:

1. Kalikan suatu baris dengan bilangan real bukan nol.
2. Pertukarkan dua baris
3. Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahannya dengan kelipatan dari baris lain.

**Definisi 1.12**

Sebuah matriks dikatakan memiliki bentuk baris eselon jika:

1. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1
2. Jika baris *k* tidak seluruhnya mengandung 0, maka banyak elemen nol bagian muka pada baris *k+1* lebih besar dari banyaknya elemen nol di bagian depan baris *k*.
3. Jika terdapat baris-baris yang elemennya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada tepat dibawah baris-baris yang memiliki elemen-elemen bukan nol.

✍ **Latihan 1.6** Tentukan apakah matriks-matriks berikut ini merupakan matriks yang memiliki bentuk eselon baris atau tidak



**Definisi 1.13**

Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon dengan menggunakan OBE disebut *Eliminasi Gauss*.

**Definisi 1.14**

Suatu matriks memiliki baris eselon tereduksi jika :

1. Matriks memiliki bentuk baris eselon.
2. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya elemen bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon tereduksi dengan menggunakan OBE disebut *Eliminasi Gauss-Jordan/Reduksi Gauss-Jordan*.

✍ **Latihan 1.7** Tentukan apakah bentuk matriks berikut ini memiliki baris eselon tereduksi atau tidak.



**Contoh 1.15** :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini menggunakan reduksi Gauss-Jordan



Langkah – langkah penyelesaian sistem persamaan diatas dilakukan sebagai berikut:



1. (b) (c)



(d) (e) (f)



Penyelesaiannya adalah 

(g) (h)

Keterangan:

1. Pertukarkan baris pertama dengan baris kedua sehingga diperoleh matriks (a).
2. Kalikan baris pertama dengan -2 kemudian tambahkan dengan bilangan yang ada pada baris kedua sehingga diperoleh matriks (b).
3. Kalikan baris pertama dengan -3 kemudian tambahkan dengan bilangan yang ada pada baris ketiga sehingga diperoleh matriks (c).
4. Kalikan baris kedua dengan  sehingga diperoleh matriks (d).
5. Kalikan baris kedua dengan -3 kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris ketiga sehingga diperoleh matriks (e).
6. Kalikan baris ketiga dengan -2 sehingga diperoleh matriks (f).
7. Kalikan baris kedua dengan -1 kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris pertama sehingga diperoleh matriks (g).
8. Kalikan baris ketiga dengan  kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris kedua selanjutnya kalikan baris ketiga dengan -kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris pertama sehingga diperoleh matriks (h).
9. Untuk mendapatkan himpunan penyelesaian, ubah kembali kebentuk perkalian matriks . Kemudian manfaatkan kesamaan dua buah matriks untuk mengetahui himpunan penyelesaiannya

Perhatikan kembali **contoh 1.15** Proses yang dilakukan dari (a) sampai (f) adalah proses Eliminasi Gauss.

 dapat dituliskan menjadi 

Dengan mensubstitusikan ke persamaan kedua akan diperoleh  kemudian nilai disubstitusikan ke persamaan pertama sehingga diperoleh . Proses yang dilakukan ini disebut dengan cara substitusi balik.

✍ **Latihan 1.8** Gunakan Eliminasi Gauss dan subtitusi balik untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini kemudian periksa hasilnya dengan menggunakan Reduksi Gauss Jordan



* 1. **Menentukan Invers Matriks dengan OBE**

**Definisi 1.16**

Suatu matriks *A* bujur sangkar dapat dibalik jika terdapat suatu matriks *B* sehingga berlaku maka matriks *A* disebut dapat dibalik dan *B* adalah matriks invers dari *A* (ditulis ).

✍ **Latihan 1.9** Periksalah apakah *B* adalah invers dari matriks *A*.



**Teorema 1.3**

Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama maka:

1. *AB* dapat dibalik
2. **

Untuk mendapatkan invers suatu matriks yang dapat dibalik *A*, kita harus menemukan serangkaian OBE yang mereduksi *A* menjadi identitas dan kemudian melakukan serangkaian operasi yang sama pada *In* untuk memperoleh matriks .

**Contoh 1.6:**

Cari invers dari matriks



**Penyelesaian:**

Kita harus menyandingkan matriks *A* dengan matriks *I* berukuran 3x3 sehingga diperoleh matriks dan setelah proses OBE diperoleh matriks .



Jadi 

Catatan:

Setelah Sistem Persamaan Linier (SPL) diubah menjadi perkalian matriks . Dan diketahui bahwa A dapat dibalik, maka untuk menentukan himpunan penyelesaian SPL tersebut hanya tinggal

**✍ Latihan 1.10**

1. Lakukan proses OBE pada contoh diatas sehingga terbukti bahwa invers dari *A* adalah 
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari SPL berikut menggunakan invers

|  |
| --- |
|  |
| **DETERMINAN**  JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN |
| TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :   1. Mengetahui sifat-sifat determinan. 2. Menggunakan teknik ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan. 3. Menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. |

**Materi:**

**2**

* 1. **Pendahuluan**

**Definisi 2.1**

Misalkan *A* adalah matriks bujur sangkar berukuran 2x2. Determinan matriks *A* didefinisikan sebagai:

det(*A*)=det 

**Definisi 2.2**

Jika matriks *A* berukuran 3x3, determinan matriks *A* didefinisikan sebagai:



Determinan dapat dihitung dengan menggunakan metode Sarrus, diilustrasikan sebagai berikut:



* - - + + +
* +

**✍ Latihan 2.1**

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini (bisa menggunakan aturan Sarrus) :



\*Aturan Sarrus hanya berlaku untuk matriks berukuran maksimal 3x3.

* 1. **Sifat-sifat Determinan**

Sebelumnya kita telah membahas tentang cara menghitung determinan untuk matriks berukuran maksimal 3x3, berikutnya kita dapat menggunakan sifat-sifat determinan berikut ini untuk menghitung determinan dari matriks yang berukuran lebih besar.

**Teorema 2.1**

Jika *A* matriks bujur sangkar maka:

i) Jika *A* mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol maka det(*A*) = 0.

ii) det(*A*)=det(*A*T)

**✍Latihan 2.2**

Gunakan matriks 3x3 sebarang untuk memeriksa sifat i) dan ii) dari teorema 2.1.

**Teorema 2.2**

Jika *A* adalah suatu matriks segitiga nxn (segitiga atas,segitiga bawah, atau diagonal) maka det(*A*) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu



**✍Latihan 2.3**

Hitunglah determinan dari masing-masing matriks berikut ini:

  

 

**Teorema 2.3**

Misalkan *A* matriks *n*x*n*

* Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari *A* dikalikan dengan suatu skalar α, maka det(*B*) = α.det(*A*).
* Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau kolom dari *A* dipertukarkan maka det(*B*) = -det(*A*).
* Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika suatu panggandaan suatu baris *A* ditambahkan pada baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka det(*B*) = det(*A*).

**Contoh 2.1**:

|  |  |
| --- | --- |
| **Hubungan** | **Operasi** |
| det(*B*)=α.det(*A*) | Baris pertama *A* dikalikan dengan α. |
| det(*B*) = - det(*A*) | Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan. |
| det(*B*) = det(*A*) | Suatu penggandaan baris kedua dari *A* ditambahkan pada baris pertama. |

**Teorema 2.4**

Jika *A* adalah matriks bujur sangkar dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional, maka det (*A*)=0.

**Contoh 2.2** :

=0

Dari contoh baris pertama dan baris kedua adalah dua baris yang proporsional sehingga nilai determinannya adalah 0.

**✍Latihan 2.4**



Periksalah bahwa matriks-matriks diatas mempunyai determinan nol, berikan alasannya!

**Teorema 2.4**

Sifat-sifat dasar determinan:

Misalkan *A* dan *B* matriks *n*x*n* dan α skalar maka

1. 
2. 
   1. **Ekspansi Kofaktor**

**Definisi 2.3**

Jika *A* sebuah matriks bujursangkar *n*x*n* maka minor dari *aij* dituliskan dengan dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari *A*. Bilangan  dinyatakan oleh dan disebut kofaktor anggota .

**Contoh 2.3**:

  

**✍Latihan 2.5**

Dengan menggunakan matriks **contoh 2.3** tentukan *M*12 , C12 dan *M*23 , C23

**Teorema 2.5**

Determinan suatu matriks *A* berukuran *n*x*n* bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan yaitu untuk setiap dan 

 (perluasan kofaktor disepanjang kolom ke-*j*)

 (perluasan kofaktor disepanjang baris ke-*i*)

**Contoh 2.4:**

det(*A*)=

Perhatikan bahwa sehingga secara matriks dapat digambarkan



**✍Latihan 2.6**

Gunakan kolom atau baris lainnya untuk menghitung determinan *A*! Apakah nilai determinan yang diperoleh sama dengan **contoh 2.4**.

* 1. **Menghitung Determinan Menggunakan Sifat-sifat Determinan**

Kita dapat menggunakan reduksi baris, sifat-sifat determinan yang dibahas sebelumnya dan perluasan kofaktor untuk menghitung determinan matriks. Perhatikan contoh berikut dan tentukan sifat-sifat yang digunakan untuk menentukan determinannya.

**Contoh 2.5:**  

det(*A*)= 

det(*B*) 



**✍Latihan 2.7**

Tentukan determinan dari matriks berikut ini



* 1. **Aplikasi Determinan**

Salah satu kegunaan determinan adalah untuk menentukan invers suatu matriks

**Teorema 2.6**

Matriks *A* mempunyai invers jika dan hanya jika det(*A*)0

**Definisi 2.4**

Matriks yang mempunyai determinan 0 disebut **matriks tak singular**, sedangkan matriks yang mempunyai determinan = 0 disebut **matriks singular**.

**Definisi 2.5**

Jika *A* adalah sebarang matriks *n*x*n* dan adalah kofaktor dari maka matriks



disebut matriks kofaktor dari *A*. Transpos dari matriks ini disebut adjoin *A* dinyatakan adj(A).

**Teorema 2.7**

Jika *A* adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka:



**✍ Latihan 2.8**

Tentukan adj(*A*) dan 



**Teorema 2.8**

Jika *A* dan *B* adalah matriks – matriks *nxn* yang taksingular, maka *AB* juga tak singular dan .

* 1. **Aturan Cramer**

**Definisi 2.6**

Diketahui suatu sistem persamaan linear :



dapat dituliskan dalam bentuk hasil kali matriks

 atau 

**Teorema 2.9**

Jika  merupakan suatu sistem *n* persamaan linear dengan *n* peubah sedemikian sehingga maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu:



Dengan adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-*j* dari *A* dengan anggota-anggota pada matriks



**Contoh 2.6 :**

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan



**Penyelesaian**



sehingga diperoleh



**✍ Latihan 2.9**

Selesaikan sistem persamaan berikut menggunakan aturan Cramer

