

METODE SIMPLEKS

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL
Pertemuan Ke-3

Riani Lubis

Program Studi Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan

- Metode simpleks merupakan sebuah prosedur matematis berulang untuk menemukan penyelesaian optimal soal program linier.
- Digunakan untuk menyelesaikan masalah PL yang melibatkan dua variabel atau lebih
- Prinsipnya metode ini menyelesaikan masalah PL melalui perhitungan ulang (iterasi) dimana langkah-langkah perhitungan yang sama diulang berkali-kali sampai solusi optimum diperoleh.

Terminologi

- Variabel **Slack** :
 - Membuat nilai ruas kiri sama dengan ruas kanan pada kendala yang berupa pembatas
 - Menampung sisa kapasitas/kapasitas yang tidak digunakan pada kendala yang berupa pembatas
- Variabel **Surplus** :
 - Membuat nilai ruas kiri sama dengan nilai ruas kanan pada kendala yang berupa syarat.
 - Menampung kelebihan nilai ruas kiri pada kendala yang berupa syarat.
- Variabel **artifisial** berfungsi untuk memperluas daerah fisibel
- Variabel **non-basis** adalah variabel yang bernilai nol.
- Variabel **basis** adalah variabel yang bernilai positif

Bentuk Standar PL

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maks/Min} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Fungsi Pembatas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

dimana ;

c_n : *cost/profit*

x_n : variabel keputusan

a_{mn} : parameter pembatas

b_m : pembatas

Transformasi Bentuk PL → Standar Simpleks

Fungsi Tujuan

$$\text{Min } Z = \text{Fungsi Tujuan Standar} + 0S_m - 0S_m + R_m$$

$$\text{Maks } Z = \text{Fungsi Tujuan Standar} + 0S_m - 0S_m - R_m$$

Fungsi Pembatas



Contoh

- Kasus diambil berdasarkan kasus perusahaan kaca WYNDOR GLASS .

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } z = 3 X_1 + 5 X_2$$

Pembatas :

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

- Maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

1. Konversikan formulasi matematik awal ke bentuk standar Simpleks

Formulasi Bentuk Standar Program Linier :

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

Fungsi Pembatas :

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Formulasi Bentuk Standar Simpleks:

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimasi } Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

atau

$$Z - 3 X_1 - 5 X_2 = 0$$

Fungsi Pembatas :

$$X_1 + S_1 = 4$$

$$2X_2 + S_2 = 12$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + S_3 = 18$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2. Nilai-nilai dalam bentuk standar dimasukkan ke dalam tabel simpleks

Pers.

$$\begin{array}{rcl}
 (0) & Z - 3X_1 - 5X_2 & = 0 \\
 (1) & X_1 + S_1 & = 4 \\
 (2) & 2X_2 + S_2 & = 12 \\
 (3) & 3X_1 + 2X_2 + S_3 & = 18
 \end{array}$$

Tabel Simpleks :

Iterasi 0		VARIABEL NON-BASIS		VARIABEL BASIS			RIGHT HAND SIDE
BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	1	0	1	0	0	4
S ₂	0	0	2	0	1	0	12
S ₃	0	3	2	0	0	1	18

3. Tentukan Entering Variable (EV)

Memilih **variabel non-basis** yang akan memasuki variabel basis dengan cara :

- F. Tujuan maksimasi → pilih variabel non-basis yang mempunyai nilai negatif terbesar (nilai paling kecil)
- F. Tujuan minimasi → pilih variabel non-basis yang mempunyai nilai positif terbesar (nilai paling besar)

Iterasi 0

ENTERING VARIABLE

VARIABEL NON BASIS

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	1	0	1	0	0	4
S ₂	0	0	2	0	1	0	12
S ₃	0	3	2	0	0	1	18

4. Tentukan Leaving Variable (LV)

Memilih rasio yang mempunyai nilai **positif terkecil** yang akan meninggalkan variabel basis.

$$\text{Rasio} = \text{Solusi (RHS)} / \text{EV}$$

Titik temu dari LV dengan EV disebut “Elemen Poros”

ITERASI 0

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	1	0	1	0	0	4
S ₂	0	0	2	0	1	0	12
S ₃	0	3	2	0	0	1	18

RASIO

$$4/0 = \#$$

$$12/2 = 6$$

$$18/2 = 9$$

LEAVING
VARIABLE

ELEMEN
POROS

5. Hitung nilai pada baris LV (baris kunci)

Menghitung persamaan elemen poros baru dengan cara :

$$\text{Pers. El. Poros} = \text{Pers. El. Poros Lama} / \text{El. Poros}$$

Iterasi 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUSI (RHS)
Z							
S ₁							
X ₂	0	0	1	0	1/2	0	6
S ₃							

6. Hitung nilai baris baru selain baris LV (baris kunci)

Menentukan persamaan baris baru selain persamaan elemen poros, dengan cara :

$$\text{Pers. Baru} = \text{Pers. Lama} - (\text{El. Kolom Entering}) \times (\text{Pers. El. Poros Baru})$$

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30
S_1	0	1	0	1	0	0	4
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6
S_3	0	3	0	0	-1	1	6

7. Ulangi langkah 3 s/d 7, sampai tidak ada variabel non-basis yang bertanda :

- F. Tujuan maksimasi → bertanda negatif (-)
- F. Tujuan minimasi → bertanda positif (+)

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)	
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30	RASIO
S_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1 = 4
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6	6/0 = #
S_3	0	3	0	0	-1	1	6	6/3 = 2

ENTERING VARIABLE

LEAVING VARIABLE

ELEMEN POROS

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI (RHS)
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2

Karena variabel non-basis ≥ 0 semua, maka diperoleh nilai optimal :

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 6$$

$$Z = 36 \times \$1000 = \$ 36000$$

Penyelesaian PL

- Jika semua persamaan fungsi pembatas bertanda \leq , maka diselesaikan dengan metode simpleks biasa
- Jika satu/lebih persamaan fungsi pembatas bertanda \geq atau $=$, maka diselesaikan dengan metoda Big M atau metoda Dua Phasa

Contoh Dengan Simpleks Biasa

F. Tujuan : $\min \quad Z = 2X_1 - 3X_2$

F. Pembatas :

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 - X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Konversi ke dalam bentuk standar/kanonik

F. Tujuan : $\min \quad Z = 2X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$

$$\mathbf{Z - 2X_1 + 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0}$$

F. Pembatas :

$$X_1 + X_2 + S_1 = 4$$

$$X_1 - X_2 + S_2 = 6$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	SOLUSI
Z	1	-2	3	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	4
S ₂	0	1	-1	0	1	6

EV

RASIO

4

-6

LV

ELEMEN
POROS

ITERASI 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	SOLUSI
Z	1	-5	0	-3	0	-12
X ₂	0	1	1	1	0	4
S ₂	0	2	0	1	1	10

Solusi Optimal :

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 4$$

$$Z = -12$$

Kasus-Kasus Khusus

1. Degenerasi

- Persoalan ini timbul jika variabel basis mempunyai nilai nol (0) atau ruas kanan mempunyai nilai nol (0)
- Pada kasus ini kemungkinan muncul 2 hal :
 1. Pemilihan LV kembali ke langkah awal dan nilai yang dihasilkan oleh variabel keputusan & fungsi tujuan adalah sama → terjadi *loop/cycling*
 2. Degenerasi temporer ; pada ruas kanan mengandung nilai nol (0) tetapi hasil yang diperoleh pada langkah berikutnya akan menghilangkan nilai nol sehingga variabel keputusan mungkin akan berubah nilainya dan nilai fungsi tujuan akan sama dengan langkah sebelumnya
- Bila pada variabel non-basis yang telah berharga nol (0) kemudian pada iterasi berikutnya, kembali bernilai negatif (-). Maka optimalnya yang diambil adalah yang sebelumnya (untuk kasus maksimasi)

Contoh Degenerasi

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 9X_2$

F. Pembatas :

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Konversi ke dalam bentuk standar/kanonik

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 9X_2 + 0S_1 + 0S_2$
 $Z - 3X_1 - 9X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$

F. Pembatas :

$$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	-3	-9	0	0	0
S_1	0	1	4	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
X_2	0	$1/4$	1	$1/4$	0	2
S_2	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	0	0	$3/2$	$3/2$	18
X_2	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	2
X_1	0	1	0	2	2	0

Karena variabel basis $X_1 = 0$, maka nilai optimal :

$$X_1 = \dots$$

$$X_2 = \dots$$

$$Z = \dots$$

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	0	0	$3/2$	$3/2$	18
X_2	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	2
X_1	0	1	0	2	2	0

Karena variabel basis $X_1 = 0$, maka nilai optimal :

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 2$$

$$Z = 18$$

Contoh Degenerasi Temporer

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 2X_2$

F. Pembatas :

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$4X_1 - X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Konversi ke dalam bentuk standar/kanonik

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$$\mathbf{Z - 3X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0}$$

F. Pembatas :

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 12$$

$$4X_1 + X_2 + S_2 = 8$$

$$4X_1 - X_2 + S_3 = 8$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
S_1	0	4	3	1	0	0	12
S_2	0	4	1	0	1	0	8
S_3	0	4	-1	0	0	1	8

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	$-5/4$	0	$3/4$	0	6
S_1	0	0	2	1	1	0	4
X_1	0	1	$1/4$	0	$1/4$	0	2
S_3	0	0	-2	0	-1	1	0

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	$5/8$	$1/8$	0	$17/2$
X_2	0	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	2
X_1	0	1	0	$-1/8$	$3/8$	0	$3/2$
S_3	0	0	0	1	-2	1	4

Nilai optimal :

$$X_1 = \dots$$

$$X_2 = \dots$$

$$Z = \dots$$

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	$5/8$	$1/8$	0	$17/2$
X_2	0	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	2
X_1	0	1	0	$-1/8$	$3/8$	0	$3/2$
S_3	0	0	0	1	-2	1	4

Nilai optimal :

$$X_1 = 3/2$$

$$X_2 = 2$$

$$Z = 17/2$$

2. Solusi Optimum Banyak

Pada kasus ini tidak ada permasalahan pada pemilihan EV dan LV, tetapi nilai optimal yang dihasilkan pada langkah terakhir “sama” dengan nilai variabel keputusan yang berbeda

Contoh :

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	0	-3	30
X_1	0	1	1/3	3
S_2	0	0	2	2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	SOLUSI
Z	1	30
X_1	0	1
X_2	0	5

3. **Solusi Tak Terbatas**

- Pada kasus ini terdapat ruang solusi yang tidak terbatas sehingga fungsi tujuan dapat meningkat (untuk maksimasi) atau menurun (untuk minimasi) secara tidak terbatas.
- Biasanya nilai yang dimiliki oleh elemen yang ada di bawah EV bernilai satu atau nol.

4. **Tidak Ada Solusi Optimal (Pseudo Optimal)**

- Tidak memiliki solusi optimal. Meskipun ada, solusi optimalnya bernilai semu
- Pada kasus ini ditunjukkan dengan adanya nilai pada fungsi tujuan yang mengandung M (nilai penalti/variabel artifisial R)