

METODE DUA PHASA

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL
Pertemuan Ke-5

Riani Lubis

Program Studi Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan (1)

- Pendekatan standar yang digunakan disebut teknik variabel artifisial (*artificial-variable technique*).
- Teknik ini menyajikan masalah artifisial dengan memperkenalkan variabel *dummy* (disebut variabel artifisial) ke dalam masing-masing kendala yang membutuhkannya.
- Variabel ini sengaja dimunculkan untuk dijadikan variabel basis awal persamaan tersebut.
- Fungsi tujuan dimodifikasi untuk memberikan pinalti yang tinggi karena nilai-nilai yang dimiliki lebih besar daripada nol.

Pendahuluan (2)

- Pada pendekatan ini, variabel artifisial dalam fungsi tujuan diberi suatu biaya sangat besar (dalam perhitungan komputer biasanya 3 atau 4 kali besarnya dibandingkan bilangan lain dalam model). Dalam praktik, huruf M digunakan sebagai biaya dalam masalah minimasi dan $-M$ sebagai keuntungan dalam masalah maksimasi dengan asumsi M adalah suatu angka positif yang besar.
- Iterasi pada metode simpleks kemudian secara otomatis memaksa variabel artifisial menghilang (menjadi nol), sampai seluruhnya habis.

Formulasi model matematik

F. Tujuan : **Maks/Min** $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

F. Pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Bentuk standar

F. Tujuan : **Maks** $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - MR_n$

atau

Min $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + MR_n$

F. Pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - S_2 + R_2 = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + R_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, S_1, S_2, R_1, \dots, R_n \geq 0$$

- Dimana :
R : variabel artificial
M : nilai pinalti
- Variabel artificial fungsinya sama dengan variabel slack, yaitu untuk mengubah variabel non-basis menjadi variabel basis
- Variabel surplus ($-S_m$) diproses sebagai variabel non-basis.
- Nilai pinalti (M) merupakan nilai yang sangat besar untuk mengurangi variabel artificial

Teknik Dua-Phasa

- Teknik ini digunakan untuk menghilangkan variabel artificial dan nilai pinalti
- Cara penyelesaian terdapat dalam dua phasa :

Phasa 1 :

- Menentukan apakah permasalahan mempunyai solusi fisible atau tidak dengan cara **meminimalkan variabel artificial**.
- Fungsi tujuan diganti dengan **meminimumkan jumlah variabel artifisialnya**.
- Jika nilai yang diperoleh pada fungsi tujuan baru mempunyai harga nol/negatif, berarti solusi fisible (persoalan fisible) & dapat dilanjutkan ke phase 2.
- Jika mempunyai nilai positif persoalan tidak fisibel sehingga pemecahan masalah dihentikan untuk phasa pertama ini.
- Berlaku bagi kedua fungsi tujuan baik maksimasi maupun minimasi

Phasa 2 :

- Mengembalikan fungsi tujuan ke fungsi tujuan semula dengan fungsi pembatas yang baru untuk pemecahan masalah selanjutnya diselesaikan dengan metode simpleks biasa.
- Fungsi pembatas baru, diperoleh dari tabel terakhir dari perhitungan phasa 1 dengan menghilangkan variabel artificial yang sudah minimum.

Contoh 1 :

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 5X_2$

F. Pembatas :

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ 2X_2 &\leq 12 \\ 3X_1 + 2X_2 &= 18 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bentuk standar :

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_3$

F. Pembatas :

$$\begin{aligned}X_1 + S_1 &= 4 \\2X_2 + S_2 &= 12 \\3X_1 + 2X_2 + R_3 &= 18 \\X_1, X_2, S_1, S_2, R_3 &\geq 0\end{aligned}$$

HARUS MINIMASI

Sehingga diperoleh : $R_3 = 18 - 3X_1 - 2X_2$

Phasa 1 :

F. Tujuan : min $r = R_3 = 18 - 3X_1 - 2X_2$

$$r + 3X_1 + 2X_2 = 18$$

F. Pembatas :

$$\begin{aligned}X_1 + S_1 &= 4 \\2X_2 + S_2 &= 12 \\3X_1 + 2X_2 + R_3 &= 18 \\X_1, X_2, S_1, S_2, R_3 &\geq 0\end{aligned}$$

ITERASI 0

BASIS	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_3	SOLUSI
r	1	3	2	0	0	0	18
S_1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	0	0	2	0	1	0	12
R_3	0	3	2	0	0	1	18

RASIO

4

#

6

ITERASI 1

BASIS	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_3	SOLUSI
r	1	0	2	-3	0	0	6
X_1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	0	0	2	0	1	0	12
R_3	0	0	2	-3	0	1	6

RASIO

#

6

3

Sudah minimum, jadi dihilangkan



ITERASI 2

BASIS	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_3	SOLUSI
r	1	0	0	0	0	-1	0
X_1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	0	0	0	3	1	-1	6
X_2	0	0	1	-3/2	0	1/2	3

- Sudah tidak ada lagi nilai positif pada variabel basis & non-basis, kecuali r .
- Dapat diteruskan untuk mencari nilai optimum pada phase 2.
- Tetapi jika terjadi pengulangan, maka harus dihentikan

Phasa 2 :

F. Tujuan : maks $Z = 3X_1 + 5X_2$

F. Pembatas :

$$X_1 + S_1 = 4 \quad \Rightarrow X_1 = 4 - S_1$$

$$3S_1 + S_2 = 6$$

$$X_2 - 3/2S_1 = 3 \quad \Rightarrow X_2 = 3 + 3/2S_1$$

Nilai X_1 dan X_2 disubstitusikan ke pers. F. Tujuan :

$$\begin{aligned} Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ &= 3(4 - S_1) + 5(3 + 3/2S_1) \\ &= 12 - 3S_1 + 15 + 15/2S_1 \\ &= 27 + 9/2S_1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z - 9/2S_1 = 27} \quad \rightarrow \text{Jadi F. Tujuan Baru}$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	SOLUSI
Z	1	0	0	-9/2	0	27
X ₁	0	1	0	1	0	4
S ₂	0	0	0	3	1	6
X ₂	0	0	1	-3/2	0	3

RASIO

4

2

-2

ITERASI 1

BASIS	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	SOLUSI
Z	1	0	0	0	3/2	36
X ₁	0	1	0	0	-1/3	2
S ₂	0	0	0	1	1/3	2
X ₂	0	0	1	0	1/2	6

Solusi Optimal :

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 6$$

$$Z = 36$$

Contoh 2 :

F. Tujuan : $\min \quad Z = 3X_1 + 5X_2$

F. Pembatas :

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ 2X_2 &= 12 \\ 3X_1 + 2X_2 &\geq 18 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bentuk standar :

F. Tujuan : $\min \quad Z = 3X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_3 + MR_2 + MR_3$

F. Pembatas :

$$\begin{aligned} X_1 + S_1 &= 4 \\ 2X_2 + R_2 &= 12 \\ 3X_1 + 2X_2 - S_3 + R_3 &= 18 \\ X_1, X_2, S_1, S_3, R_2, R_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$R_2 = 12 - 2X_2$$

$$R_3 = 18 - 3X_1 - 2X_2 + S_3$$

Phasa 1 :

F. Tujuan : min $r = R_2 + R_3$
 $r = 12 - 2X_2 + 18 - 3X_1 - 2X_2 + S_3$

Sehingga diperoleh,

$$r + 3X_1 + 4X_2 - S_3 = 30$$

F. Pembatas :

$$\begin{array}{rcccccl} X_1 & & + S_1 & & = & 4 \\ & 2X_2 & & + R_2 & = & 12 \\ 3X_1 + 2X_2 & & & - S_3 + R_3 & = & 18 \\ X_1, X_2, S_1, S_3, R_2, R_3 & \geq & & & & 0 \end{array}$$

ITERASI 0

BASIS	r	X_1	X_2	S_1	S_3	R_2	R_3	SOLUSI
r	1	3	4	0	-1	0	0	30
S_1	0	1	0	1	0	0	0	4
R_2	0	0	2	0	0	1	0	12
R_3	0	3	2	0	-1	0	1	18

ITERASI 1

BASIS	r	X_1	X_2	S_1	S_3	R_2	R_3	SOLUSI
r	1	3	0	0	-1	-2	0	6
S_1	0	1	0	1	0	0	0	4
X_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6
R_3	0	3	0	0	-1	-1	1	6

ITERASI 2

BASIS	r	X_1	X_2	S_1	S_3	R_2	R_3	SOLUSI
r	1	0	0	0	0	-1	-1	0
S_1	0	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2
X_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6
X_1	0	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2

- Sudah tidak ada lagi nilai positif pada variabel basis & non-basis, kecuali r .
- Dapat diteruskan untuk mencari nilai optimum pada phase 2.
- Tetapi jika terjadi pengulangan, maka harus dihentikan

Phasa 2 :

F. Tujuan : $\min \quad Z = 3X_1 + 5X_2$

F. Pembatas :

$$\begin{array}{rcl} & S_1 + 1/3S_3 & = 2 \\ & X_2 & = 6 \\ X_1 & - 1/3S_3 & = 2 \end{array} \Rightarrow X_1 = 2 + 1/3S_3$$

Subtitusikan X_1 ke pers. F. Tujuan :

$$\begin{aligned} Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ &= 3(2 + 1/3S_3) + 5(6) \\ &= 6 + S_3 + 30 \\ \mathbf{Z - S_3} &= \mathbf{36} \quad \rightarrow \text{Jadi F. Tujuan Baru} \end{aligned}$$

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	0	-1	36
S_1	0	0	0	1	1/3	2
X_2	0	0	1	0	0	6
X_1	0	1	0	0	-1/3	2

Solusi Optimal :

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 6$$

$$Z = 36$$