**4**

 **RUANG HASIL KALI DALAM**

JUMLAH PERTEMUAN: 3 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

1. Menghitung hasil kali dalam baku dan hasil kali silang.
2. Menggunakan aksioma hasil kali dalam untuk memeriksa ruang hasil kali dalam
3. Mengetahui sifat-sifat ruang hasil kali dalam
4. Menggunakan sifat-sifat basis ortogonal dan basis ortonormal
5. Menggunakan metode Gram-Schimdt untuk menentukan basis ortogonal.

**Materi:**

* 1. **Hasil Kali Dalam Baku**

**Definisi 4.1**

Jika dan  adalah vektor-vektor kolom dalam ruang berdimensi 2, $\overbar{u},\overbar{v}\in R^{2},$ maka hasil kali titik/hasil kali skalar yang dinotasikan sebagai $\overbar{u}∙\overbar{v}$ adalah

$$\overbar{u}∙\overbar{v}=u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}$$

Jika maka $\overbar{u},\overbar{v}\in R^{3}$ maka hasil kali titik nya adalah

$$\overbar{u}∙\overbar{v}=u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}+u\_{3}v\_{3}$$

**Hasil kali dalam baku** untuk  didefinisikan sebagai hasil kali skalar $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=\overbar{u}∙\overbar{v}$

**Definisi 4.2**

Jika $\overbar{u}$ dan $\overbar{v}$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan berdimensi 3, $θ$ adalah sudut antara $\overbar{u}$ dan $\overbar{v}$, maka hasil kali titik atau hasil kali dalam Euclidean

$$\overbar{u}∙\overbar{v}=\left\{\begin{matrix}\left‖\overbar{u}\right‖\left‖\overbar{v}\right‖\cos(θ)&,jika \overbar{u}\ne \overbar{0} dan \overbar{v}\ne \overbar{0}\\0&, jika \overbar{u}=\overbar{0} dan \overbar{v}=\overbar{0}\end{matrix}\right.$$

**Definisi 4.3**

Jika $\overbar{u}$ dan $\overbar{v}$ adalah vektor-vektor tak-nol, maka sudut dari dua buah vektor dapat ditentukan dengan cara

$$\cos(θ)=\frac{\overbar{u}∙\overbar{v}}{\left‖\overbar{u}\right‖\left‖\overbar{v}\right‖}$$

✍ **Latihan 4.1**

1. Jika $\overbar{a}=\left[\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right]$, $\overbar{b}=\left[\begin{matrix}1\\2\\2\end{matrix}\right]$ tentukan $\overbar{a}∙\overbar{b}$ dan $\left〈\overbar{a},\overbar{b}\right〉$
2. Diketahui $\overbar{u}=\left[\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}\right]$dan $\overbar{v}=\left[\begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}\right]$. Tentukan sudut $θ$ antara $\overbar{u}$ dan $\overbar{v}$.
	1. **Hasil Kali Silang**

Dalam penerapan vektor dalam ruang berdimensi 3 kadang-kadang diperlukan suatu vektor yang tegak lurus terhadap dua vektor yang diketahui, untuk itu diperkenalkan sebuah jenis perkalian vektor yang menghasilkan vektor-vektor tersebut.

**Definisi 4.4**

Jika $\overbar{u},\overbar{v}\in R^{3}$ maka hasil kali silang $\overbar{u}×\overbar{v}$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\overbar{u}×\overbar{v}=\left[\begin{matrix}\left|\begin{matrix}u\_{2}&u\_{3}\\v\_{2}&v\_{3}\end{matrix}\right|\\-\left|\begin{matrix}u\_{1}&u\_{3}\\v\_{1}&v\_{3}\end{matrix}\right|\\\left|\begin{matrix}u\_{1}&u\_{2}\\v\_{1}&v\_{2}\end{matrix}\right|\end{matrix}\right]$$

**Contoh 4.1:**

Carilah $\overbar{u}×\overbar{v} $dimana $\overbar{u}=\left[\begin{matrix}1\\2\\-2\end{matrix}\right]$ dan $\overbar{v}=\left[\begin{matrix}3\\0\\1\end{matrix}\right]$!

**Penyelesaian :**

Susun dalam bentuk matriks

$$\left[\begin{matrix}1&2&-2\\3&0&1\end{matrix}\right]$$

Maka

$$\overbar{u}×\overbar{v}=\left[\begin{matrix}\left|\begin{matrix}2&-2\\0&1\end{matrix}\right|\\-\left|\begin{matrix}1&-2\\3&1\end{matrix}\right|\\\left|\begin{matrix}1&2\\3&0\end{matrix}\right|\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}2\\-7\\-6\end{matrix}\right]$$

✍ **Latihan 4.2**

1. Hitunglah $\overbar{u}×\overbar{v}$ dimana $\overbar{u}=\left[\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}\right]$ dan $\overbar{v}=\left[\begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}\right]$ dan 
2. Kemudian tentukan $\left‖\overbar{u}×\overbar{v}\right‖$ dan $\left‖\overbar{u}\right‖\left‖\overbar{v}\right‖$
3. Hitunglah $\left‖\overbar{u}×\overbar{v}\right‖\overbar{u}$ dan $\left‖\overbar{u}×\overbar{v}\right‖\overbar{v}$. Apa yang dapat Anda simpulkan dari hasil perhitungan tersebut?
4. Periksalah apakah $\left‖\overbar{u}×\overbar{v}\right‖^{2}=\left‖\overbar{u}\right‖^{2}\left‖\overbar{v}\right‖^{2}-\left(\overbar{u}∙\overbar{v}\right)^{2}$
	1. **Ruang Hasil Kali Dalam**

**Definisi 4.5**

Hasil kali dalam (dinotasikan <. ,.>) adalah fungsi yang mengaitkan setiap vektor di ruang vektor *V* dengan suatu bilangan riil dan memenuhi aksioma berikut. Misalkan *V* adalah ruang vektor, $\overbar{u},\overbar{v},\overbar{w}\in V$, $α\in R$, maka berlaku:

1. Simetris : $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=\left〈\overbar{v},\overbar{u}\right〉$
2. Aditivitas : $\left〈\overbar{u}+\overbar{v},\overbar{w}\right〉=\left〈\overbar{u},\overbar{w}\right〉+\left〈\overbar{v},\overbar{w}\right〉$
3. Homogenitas : $\left〈α\overbar{u},\overbar{v}\right〉=α\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉$
4. Positifitas : $\left〈\overbar{u},\overbar{u}\right〉\geq 0$ dan $\left〈\overbar{u},\overbar{u}\right〉=0\leftrightarrow \overbar{u}=\overbar{0}$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut *ruang hasil kali dalam*.

**Contoh 4.2**

1. Ruang hasil kali dalam Euclides ()

Misalkan $\overbar{u},\overbar{v}\in R^{n}$ maka $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}+…+u\_{n}v\_{n}$.

Maka jika $\overbar{u}\in R^{2}$ maka **panjang** $\overbar{u}$ dapat dinyatakan sebagai bentuk hasil kali dalam yaitu

$$\left‖\overbar{u}\right‖=\left〈\overbar{u},\overbar{u}\right〉^{2}=\sqrt{u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}+…+u\_{n}v\_{n}}=\sqrt{\sum\_{i=1}^{n}u\_{i}v\_{i}}$$

Dapat ditunjukkan bahwa sifat simetris, aditivitas, homogenitas dan positifitas dipenuhi

1. Jarak antara dua vektor $\overbar{u},\overbar{v}\in R^{n}$ dinyatakan dengan $d\left(\overbar{u},\overbar{v}\right)$ juga dapat dinyatakan sebagai bentuk hasil kali dalam.

$$d\left(\overbar{u},\overbar{v}\right)=\left‖\overbar{u}-\overbar{v}\right‖=\left〈\overbar{u}-\overbar{v},\overbar{u}-\overbar{v}\right〉^{2}=\sqrt{\left(u\_{1}-v\_{1}\right)^{2}+\left(u\_{2}-v\_{2}\right)^{2}+…+\left(u\_{n}-v\_{n}\right)^{2}}$$

1. Misalkan $W⊆R^{3}$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=2u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}+3u\_{3}v\_{3}$ dimana $\overbar{u},\overbar{v}\in W$. Tunjukkan *W* adalah ruang hasil kali dalam.
2. Simetris

Ambil sebarang $\overbar{u},\overbar{v}\in W$ maka

$$\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=2u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}+3u\_{3}v\_{3}=2v\_{1}u\_{1}+v\_{2}u\_{2}+3v\_{3}u\_{3}=\left〈\overbar{v},\overbar{u}\right〉$$

1. Aditivitas

Ambil sebarang $\overbar{u},\overbar{v},\overbar{w}\in W $maka

$$\left〈\overbar{u}+\overbar{v},\overbar{w}\right〉=2\left(u\_{1}+v\_{1}\right)w\_{1}+\left(u\_{2}+v\_{2}\right)w\_{2}+3\left(u\_{3}+v\_{3}\right)w\_{3}=2\left(u\_{1}w\_{1}+v\_{1}w\_{1}\right)+\left(u\_{2}w\_{2}+v\_{2}w\_{2}\right)+3\left(u\_{3}w\_{3}+v\_{3}w\_{3}\right)=2u\_{1}w\_{1}+2v\_{1}w\_{1}+u\_{2}w\_{2}+v\_{2}w\_{2}+3u\_{3}w\_{3}+3v\_{3}w\_{3}=\left(2u\_{1}w\_{1}+u\_{2}w\_{2}+3u\_{3}w\_{3}\right)+\left(2v\_{1}w\_{1}+v\_{2}w\_{2}+3v\_{3}w\_{3}\right)=\left〈\overbar{u},\overbar{w}\right〉+\left〈\overbar{v},\overbar{w}\right〉$$

1. Homogenitas

Ambil sebarang $\overbar{u},\overbar{v}\in W$ dan $α\in R$ maka

$$\left〈α\overbar{u},\overbar{v}\right〉=2αu\_{1}v\_{1}+αu\_{2}v\_{2}+3αu\_{3}v\_{3}=α\left(2u\_{1}v\_{1}+u\_{2}v\_{2}+3u\_{3}v\_{3}\right)=α\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉$$

1. Positifitas

Ambil $\overbar{u}\in W$ maka

$$\left〈\overbar{u},\overbar{u}\right〉=2u\_{1}u\_{1}+u\_{2}u\_{2}+3u\_{3}u\_{3}=2u\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}+3u\_{3}^{2}$$

Karena $u\_{1}^{2},u\_{2}^{2},u\_{3}^{2}\geq 0$ maka jelas $2u\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}+3u\_{3}^{2}\geq 0$

Dan $2u\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}+3u\_{3}^{2}=0\leftrightarrow \overbar{u}=\overbar{0}$

1. Tunjukkan bahwa $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=u\_{1}v\_{1}+2u\_{2}v\_{2}-3u\_{3}v\_{3}$ bukan merupakan hasil kali dalam.

**(Petunjuk)** Perhatikan untuk $u\_{1}^{2}+2u\_{2}^{2}-3u\_{3}^{2}\geq 0$ saat $3u\_{3}^{2}\geq u\_{1}^{2}+2u\_{2}^{2}$ maka 

Sehingga tidak memenuhi sifat positivitas.

✍ **Latihan 4.3**

1. Periksa apakah $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=4u\_{1}v\_{1}+5u\_{2}v\_{2}$ adalah suatu hasil kali dalam pada $R^{2}$
2. Periksa apakah $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=u\_{1}v\_{1}+u\_{3}v\_{3}$ adalah suatu hasil kali dalam pada $R^{3}$
3. Periksa apakah $\left〈\overbar{u},\overbar{v}\right〉=u\_{1}^{2}v\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}v\_{2}^{2}+u\_{3}^{2}v\_{3}^{2}$ adalah hasil kali dalam pada $R^{3}$

**Teorema 4.1**

Berikut ini beberapa sifat dari vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam

Jika $\overbar{u},\overbar{v},\overbar{w}$ adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real, dan $α$ adalah skalar sebarang maka:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

✍ **Latihan 4.4**

1. Buktikan Teorema 4.1
2. Jika  didefinisikan hasil kali dalam untuk maka

 dan 

Tentukan jika 

**Definisi 4.6**

Dua buah vektor dan  dalam disebut ortogonal jika 

**✍ Latihan 4.5**

Tunjukkan bahwa matriks  saling ortogonal

* 1. **Basis Ortonormal**

**Definisi 4.7**

Diketahui *V* adalah ruang hasil kali dalam dan . disebut **himpunan ortogonal** jika untuk setiap vektor dalam *V* saling tegak lurus berlaku .

**Definisi 4.8**

Diketahui *V* adalah ruang hasil kali dalam dan . disebut **himpunan ortonormal** jika

* *G* adalah himpunan ortogonal
* Norma dari 

**✍ Latihan 4.6**

Diketahui dan adalah ruang hasil kali dalam.

1. Tunjukkan bahwa ortogonal
2. Apakah ortonormal?
3. Hitunglah 
4. Tentukan 

1. Hitunglah 
2. Apakah  adalah vektor ortonormal?

NB: Vektor disebut vektor satuan/vektor normal karena vektor ini mempunyai panjang 1.

* 1. **Metode Gram-Schimdt**

Basis yang berisi vektor-vektor ortonormal disebut basis ortonormal dan basis yang berisi vektor-vektor ortogonal disebut basis ortogonal.

Perhatikan gambar berikut













 adalah proyeksi ortogonal pada *W* dan adalah proyeksi ortogonal pada *W┴*. Jika  maka  sehingga

  dapat dituliskan menjadi 

**Teorema 4.2**

Misalkan *W* adalah subruang berdimensi tehingga dari suatu ruang hasil kali dalam *V*.

1. Jika adalah suatu basis ortonormal untuk *W*, dan adalah sebarang vektor dalam *V* maka 
2. Jika adalah suatu basis ortogonal untuk *W* dan adalah sebarang vektor dalam *V* maka



**✍ Latihan 4.7**

*W* adalah subruang yang dibangun oleh  vektor-vektor ortonormal , .

1. Tentukan proyeksi ortogonal dari  =(1,1,1) pada *W*
2. Tentukan proyeksi ortogonal dari =(1,1,1) pada *W┴*

**Definsi 4.9**

Metode Gram-Schimdt adalah metode yang digunakan untuk mengubah himpunan vektor yang *bebas linear* menjadi himpunan *vektor ortogonal*.

Misalkan diketahui *B* = adalah himpunan vektor yang bebas linear, maka *B* dapat diubah menjadi himpunan *S* =  yang ortogonal dengan cara:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. ...
6. 

**Contoh 4.3:**

Diketahui adalah basis untuk ruang vektor *R*2 dengan hasil kali dalam. , , . Maka :

1. Ubahlah basis menjadi basis ortogonal 
2. Ubahlah basis menjadi basis ortonormal 

**Penyelesaian**

1. 
2. 
3. 

 

Jadi 

Setelah dihitung diperoleh norma dari masing-masing vektor



 Sehingga diperoleh basis ortonormal

 

 

**✍ Latihan 4.7**

Diketahui dengan adalah basis

1. Ubahlah  menjadi basis-basis ortogonal.
2. Ubahlah menjadi basis-basis ortonormal.

Salah satu kegunaan dalam menggunakan basis ortonormal adalah sebagai berikut:

**Teorema 4.2**

Jika adalah suatu basis ortonormal untuk suatu ruang hasil kali dalam *V*, dan maka berlaku:



**✍ Latihan 4.7**

Diberikan suatu basis-basis ortonormal yang relatif terhadap suatu ruang hasil kali dalam. Tentukan vektor koordinat terhadap basis yang bersangkutan.

1. 
2. 