Bab 1
Matrik dan Komputasi

Objektif :
⊲Mengenalkan matrik, vektor dan jenis-jenis matrik.
⊲Mendeklarasikan elemen-elemen matrik ke dalam memori komputer.
⊲Mengenalkan operasi penjumlahan dan perkalian matrik.
⊲Membuat *script* operasi matrik.

1.1 Mengenal matrik

Notasi suatu matrik berukuran n x m ditulis dengan huruf besar dan dicetak tebal, misalnya $\mathbf{A}_{n\times m}$. Huruf n menyatakan jumlah baris, dan huruf m jumlah kolom. Suatu matrik tersusun atas elemen-elemen yang dinyatakan dengan huruf kecil lalu diikuti oleh angka-angka indeks, misalnya a_{ij} . Indeks i menunjukkan posisi baris ke-i dan indeks j menentukan posisi kolom ke-j.

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Pada matrik ini, a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m} adalah elemen-elemen yang menempati baris pertama. Sementara a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2} adalah elemen-elemen yang menempati kolom kedua.
Contoh 1: Matrik $\mathbf{A}_{2\times 3}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

dimana masing-masing elemennya adalah $a_{11} = 3$, $a_{12} = 8$, $a_{13} = 5$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 4$, dan $a_{23} = 7$.

Contoh 2: Matrik $\mathbf{B}_{3\times 2}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

dimana masing-masing elemennya adalah $b_{11} = 1$, $b_{12} = 3$, $b_{21} = 5$, $b_{22} = 9$, $b_{31} = 2$, dan $b_{32} = 4$.

1.2 Vektor-baris dan vektor-kolom

Notasi vektor biasanya dinyatakan dengan huruf kecil dan dicetak tebal. Suatu matrik dinamakanvektor-baris berukuran m, bila hanya memiliki satu baris dan m kolom, yang dinyatakansebagai berikut

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Sedangkan suatumatrik dinamakan vektor-kolomberukuran n, bila hanyamemiliki satu kolom dan n baris, yang dinyatakan sebagai berikut

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

1.3 Inisialisasi matrik dalam memori komputer

Sebelum dilanjutkan, saya sarankan agar anda mencari tahu sendiri bagaimana cara membuat*m-file* di Matlab dan bagaimana cara menjalankannya. Karena semua *source code* yang terdapatdalam buku ini ditulis dalam *m-file*. Walaupun sangat mudah untuk melakukan *copy-paste*, namundalam upaya membiasakan diri menulis *source code* di *m-file*, saya anjurkan anda menulisulang semuanya.Dalam Matlab terdapat 3 cara inisialisasi matrik. Cara pertama[1], sesuai dengan Contoh 1,adalah

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

```
clear all
clc

A(1,1) = 3;
A(1,2) = 8;
A(1,3) = 5;
A(2,1) = 6;
A(2,2) = 4;
A(2,3) = 7;
A
```

[1]Cara ini bisa diterapkan pada bahasa C, Fortran, Pascal, Delphi, Java, Basic, dll. Sementara cara kedua dan caraketiga hanya akan dimengerti oleh Matlab

Sedangkan untuk matrik $\mathbf{B}_{3\times 2}$, sesuai Contoh 2 adalah

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
clear all
clc

B(1,1) = 1;
B(1,2) = 3;
B(2,1) = 5;
B(2,2) = 9;
B(3,1) = 2;
B(3,2) = 4;
B
```

Cara kedua relatif lebih mudah dan benar-benar merepresentasikan dimensi matriknya, dimanajumlah baris dan jumlah kolom terlihat dengan jelas.

```
clear all
clc

A=[ 3 8 5
    6 4 7 ];

B=[ 1 3
    5 9
    2 4 ];
A
B
```

Cara ketiga jauh lebih singkat, namun tidak menunjukkan dimensi matrik lantaran ditulis hanya dalam satu baris.

```
clear all
clc

A=[ 3 8 5 ; 6 4 7 ];
B=[ 1 3 ; 5 9 ; 2 4];
A
B
```

1.4 Macam-macam matrik

1.4.1 Matrik transpose

Operasi transpose terhadap suatumatrik akan menukar elemen-elemen kolom menjadi elemen-elemen baris. Notasi matrik tranpose adalah $\mathbf{A}^T$ atau $\mathbf{A}^t$.
Contoh 3: Operasi transpose terhadap matrik **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan Matlab, operasi transpose cukup dilakukan dengan menambahkan tanda petik tunggaldi depan nama matriknya

```
clear all
clc

A=[ 3 8 5
    6 4 7 ];

AT = A';

A
AT
```

1.4.2 Matrik bujursangkar

Matrik bujursangkar adalah matrik yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama.
Contoh 4: Matrik bujursangkar berukuran 3x3 atau sering juga disebutmatrik bujursangkarorde 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

1.4.3 Matrik simetrik

Matrik simetrik adalah matrik bujursangkar yang elemen-elemen matrik transpose-nya bernilaisama dengan matrik asli-nya.
Contoh 5: Matrik simetrik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -3 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -3 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

1.4.4 Matrik diagonal

Matrik diagonal adalah matrik bujursangkar yang seluruh elemen-nya bernilai 0 (nol), kecuali

elemen-elemen diagonalnya.
Contoh 6: Matrik diagonal orde 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 61 \end{bmatrix}$$

1.4.5 Matrik identitas

Matrik identitas adalah matrik bujursangkar yang semua elemen-nya bernilai 0 (nol), kecuali elemen-elemen diagonal yang seluruhnya bernilai 1.
Contoh 7: Matrik identitas orde 3

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.6 Matrik upper-triangular

Matrik upper-tringular adalah matrik bujursangkar yang seluruh elemen dibawah elemen diagonalbernilai 0 (nol).
Contoh 8: Matrik upper-triangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

1.4.7 Matrik lower-triangular

Matrik lower-tringular adalah matrik bujursangkar yang seluruh elemen diatas elemen diagonalbernilai 0 (nol).
Contoh 9: Matrik lower-triangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 11 & 0 \\ -5 & 10 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1.4.8 Matrik tridiagonal

Matrik tridiagonal adalah matrik bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 (nol) berada disekitarelemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 (nol).
Contoh 10: Matrik tridiagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

1.4.9 Matrik diagonal dominan

Matrik diagonal dominan adalah matrik bujursangkar yang memenuhi

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (1.4)$$

dimana i=1,2,3,..n. Coba perhatikan matrik-matrik berikut ini

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada elemen diagonal a_{ii} matrik **A**, $|7| > |2| + |0|$, lalu $|5| > |3| + |-1|$, dan $|-6| > |5| + |0|$. Makamatrik **A** disebut matrik diagonal dominan. Sekarang perhatikan elemen diagonal matrik **B**, $|6| < |4| + |-3|$, $|-2| < |4| + |0|$, dan $|1| < |-3| + |0|$. Dengan demikian, matrik **B** bukan matrikdiagonal dominan.

1.4.10 Matrik *positive-definite*

Suatu matrik dikatakan *positive-definite* bila matrik tersebut simetrik dan memenuhi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \qquad (1.5)$$

Contoh 11: Diketahui matrik simetrik berikut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

untuk menguji apakah matrik **A** bersifat *positive-definite*, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa matrik **A** bersifat *positive-definite*, karena memenuhi

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

kecuali jika x_1=x_2=x_3=0.