1.5.3 Perkalian matrik

Operasi perkalian dua buah matrik hanya bisa dilakukan bila jumlah kolom matrik pertamasama dengan jumlah baris matrik kedua. Jadi kedua matrik tersebut tidak harus berukuransama seperti pada penjumlahan dua matrik. Misalnya matrik $\mathbf{A}_{2\times3}$ dikalikan dengan matrik$\mathbf{B}_{3\times2}$, lalu hasilnya (misalnya) dinamakan matrik $\mathbf{E}_{2\times2}$

$$\mathbf{E}_{2\times2} = \mathbf{A}_{2\times3}. \mathbf{B}_{3\times2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3.1 + 8.5 + 5.2 & 3.3 + 8.9 + 5.4 \\ 6.1 + 4.5 + 7.2 & 6.3 + 4.9 + 7.4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 53 & 101 \\ 40 & 82 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tanpa mempedulikan nilai elemen-elemen masing-masing matrik, operasi perkalian antaramatrik $\mathbf{A}_{2\times3}$ dan $\mathbf{B}_{3\times2}$, bisa juga dinyatakan dalam indeks masing-masing dari kedua matriktersebut, yaitu

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} \end{bmatrix}$$

Bila dijabarkan, maka elemen-elemen matrik $\mathbf{E}_{2\times2}$ adalah

$$e_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} \tag{1.8}$$

$$e_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} \tag{1.9}$$

$$e_{21} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} \tag{1.10}$$

$$e_{22} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} \tag{1.11}$$

Sejenak, mari kita amati perubahan pasangan angka-angka indeks yang mengiringi elemen e, elemen a dan elemen b mulai dari persamaan (1.8) sampai persamaan (1.11). Perhatikanperubahan angka-indeks-pertama pada elemen e seperti berikut ini

e1.. = . .
e1.. = . .
e2.. = . .
e2.. = . .

Pola perubahan yang sama akan kita dapati pada angka-indeks-pertama dari elemen a

e1.. = a1... b... + a1... b... + a1... b...
e1.. = a1... b... + a1... b... + a1... b...
e2.. = a2... b... + a2... b... + a2... b...
e2.. = a2... b... + a2... b... + a2... b...

Dengan demikian kita bisa mencantumkan huruf i sebagai pengganti angka-angka indeks yang polanya sama

ei.. = ai... b... + ai... b... + ai... b...
ei.. = ai... b... + ai... b... + ai... b...
ei.. = ai... b... + ai... b... + ai... b...
ei.. = ai... b... + ai... b... + ai... b...

dimana i bergerak mulai dari angka 1 hingga angka 2, atau kita nyatakan i=1,2. Selanjutnya,masih dari persamaan (1.8) sampai persamaan (1.11), marilah kita perhatikan perubahanangka-indeks-kedua pada elemen e dan elemen b,

ei1 = ai... b..1 + ai... b..1 + ai... b..1
ei2 = ai... b..2 + ai... b..2 + ai... b..2
ei1 = ai... b..1 + ai... b..1 + ai... b..1
ei2 = ai... b..2 + ai... b..2 + ai... b..2

Dengan demikian kita bisa mencantumkan huruf j sebagai pengganti angka-angka indeks yang polanya sama

eij = ai... b..j + ai... b..j + ai... b..j
eij = ai... b..j + ai... b..j + ai... b..j
eij = ai... b..j + ai... b..j + ai... b..j
eij = ai... b..j + ai... b..j + ai... b..j

dimana j bergerak mulai dari angka 1 hingga angka 2, atau kita nyatakan j=1,2. Selanjutnya,masih dari persamaan (1.8) sampai persamaan (1.11), mari kita perhatikan perubahan angkaindeks-kedua elemen a dan angka-indeks-pertama elemen b, dimana kita akan dapati polasebagai berikut

eij = ai1. b1j + ai2. b2j + ai3. b3j
eij = ai1. b1j + ai2. b2j + ai3. b3j
eij = ai1. b1j + ai2. b2j + ai3. b3j
eij = ai1. b1j + ai2. b2j + ai3. b3j

Dan kita bisa mencantumkan huruf k sebagai pengganti angka-angka indeks yang polanya sama, dimana k bergerak mulai dari angka 1 hingga angka 3, atau kita nyatakan k=1,2,3.

eij = aik. bkj + aik. bkj + aik. bkj
eij = aik. bkj + aik. bkj + aik. bkj
eij = aik. bkj + aik. bkj + aik. bkj
eij = aik. bkj + aik. bkj + aik. bkj

Kemudian secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut

$$e_{ij} = a_{ik}.b_{kj} + a_{ik}.b_{kj} + a_{ik}.b_{kj} \tag{1.12}$$

Selanjutnya dapat ditulis pula formula berikut

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \tag{1.13}$$

dimana i=1,2; j=1,2; dan k=1,2,3.

Berdasarkan contoh ini, maka secara umum bila ada matrik $\mathbf{A}_{n\times m}$ yang dikalikan dengan matrik$\mathbf{B}_{m\times p}$, akan didapatkan matrik $\mathbf{E}_{n\times p}$ dimana elemen-elemen matrik **E** memenuhi

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \tag{1.14}$$

dengan i=1,2,. . . ,n; j=1,2. . . ,p; dan k=1,2. . . ,m.

1.5.4 Komputasi perkalian matrik

Mari kita mulai lagi dari *source code* paling dasar dari operasi perkalian matrik sesuai dengan contoh di atas.

```
clear all
clc

A = [3 8 5; 6 4 7]; % inisialisasi matrik A
B = [1 3; 5 9; 2 4]; % inisialisasi matrik B

% ---proses perkalian matrik----
E(1,1)=A(1,1)*B(1,1)+A(1,2)*B(2,1)+A(1,3)*B(3,1); % baris ke-9
E(1,2)=A(1,1)*B(1,2)+A(1,2)*B(2,2)+A(1,3)*B(3,2); % baris ke-10
E(2,1)=A(2,1)*B(1,1)+A(2,2)*B(2,1)+A(2,3)*B(3,1); % baris ke-11
E(2,2)=A(2,1)*B(1,2)+A(2,2)*B(2,2)+A(2,3)*B(3,2); % baris ke-12

% ---menampilkan matrik A, B dan E----
A
B
E
11 Maret 2019
```

Sejenak, mari kita amati dengan cermat statemen dari baris ke-9 sampai ke-12 sambil dikaitkan dengan bentuk umum penulisan indeks pada perkalian matrik yaitu

$$e_{ij} = a_{ik}.b_{kj} + a_{ik}.b_{kj} + a_{ik}.b_{kj} \tag{1.15}$$

Dari sana ada 4 *point* yang perlu dicatat:

- elemen e memiliki indeks i dan indeks j dimana indeks j lebih cepat berubah dibanding indeks i.
- pada baris statemen ke-9 sampai ke-12 ada tiga kali operasi perkalian dan dua kali operasipenjumlahan yang semuanya melibatkan indeks i, indeks j dan indeks k. Namun indeks k selalu berubah pada masing-masing perkalian. Jadi indeks k paling cepatberubah dibanding indeks i dan indeks j.
- elemen a memiliki indeks i dan indeks k dimana indeks i lebih cepat berubah dibanding indeks k.
- elemen b memiliki indeks k dan indeks j dimana indeks j lebih cepat berubah dibandingindeks k.

Tahapan modifikasi source code perkalian matrik tidak semudah penjumlahan matrik. Dan mengajarkan logika dibalik source code perkalian matrik jauh lebih sulit daripada sekedarmemodifikasi source code tersebut. Tapi akan saya coba semampu saya lewat tulisan ini walauharus perlahan-lahan. Mudah-mudahan mudah untuk dipahami.

Saya mulai denganmemecah operasi pada statemen baris ke-8 yang bertujuanmenghitung nilai E(1, 1)

```
clear all
clc
A = [3 8 5; 6 4 7]; % inisialisasi matrik A
B = [1 3; 5 9; 2 4]; % inisialisasi matrik B
% ---proses perkalian matrik----
% ---E(1,1) dihitung 3 kali
E(1,1)=       A(1,1)*B(1,1);
E(1,1)=E(1,1)+A(1,2)*B(2,1);
E(1,1)=E(1,1)+A(1,3)*B(3,1);
% ---E(1,2); E(2,1); dan E(2,2) masih seperti semula
E(1,2)=A(1,1)*B(1,2)+A(1,2)*B(2,2)+A(1,3)*B(3,2);
E(2,1)=A(2,1)*B(1,1)+A(2,2)*B(2,1)+A(2,3)*B(3,1);
E(2,2)=A(2,1)*B(1,2)+A(2,2)*B(2,2)+A(2,3)*B(3,2);
% ---menampilkan matrik A, B dan E----
A
B
E
```

Agar baris ke-9 memiliki pola yang sama dengan baris ke-11 dan ke-12, upaya yang dilakukanadalah

```
clear all
clc

A = [3 8 5; 6 4 7]; % inisialisasi matrik A
B = [1 3; 5 9; 2 4]; % inisialisasi matrik B

% ---proses perkalian matrik----
% ---E(1,1) dihitung 3 kali
E(1,1)=0;
E(1,1)=E(1,1)+A(1,1)*B(1,1);
E(1,1)=E(1,1)+A(1,2)*B(2,1);
E(1,1)=E(1,1)+A(1,3)*B(3,1);

% ---E(1,2); E(2,1); dan E(2,2) masih seperti semula
E(1,2)=A(1,1)*B(1,2)+A(1,2)*B(2,2)+A(1,3)*B(3,2);
E(2,1)=A(2,1)*B(1,1)+A(2,2)*B(2,1)+A(2,3)*B(3,1);
E(2,2)=A(2,1)*B(1,2)+A(2,2)*B(2,2)+A(2,3)*B(3,2);

% ---menampilkan matrik A, B dan E----
A
B
E
```

Dari sini kita bisa munculkan indeks k

```
clear all
clc

A = [3 8 5; 6 4 7]; % inisialisasi matrik A
B = [1 3; 5 9; 2 4]; % inisialisasi matrik B
```

```
% ---proses perkalian matrik----
E(1,1)=0;
for k=1:3 % k bergerak dari 1 sampai 3
      E(1,1)=E(1,1)+A(1,k)*B(k,1);
end

% ---E(1,2); E(2,1); dan E(2,2) masih seperti semula
E(1,2)=A(1,1)*B(1,2)+A(1,2)*B(2,2)+A(1,3)*B(3,2);
E(2,1)=A(2,1)*B(1,1)+A(2,2)*B(2,1)+A(2,3)*B(3,1);
E(2,2)=A(2,1)*B(1,2)+A(2,2)*B(2,2)+A(2,3)*B(3,2);

% ---menampilkan matrik A, B dan E----
A
B
E
```

Kemudian cara yang sama dilakukan pada E(1, 2), E(2, 1), dan E(2, 2). Anda mesti cermat dan hati-hati dalam menulis angka-angka indeks!!!

```
clear all
clc

A = [3 8 5; 6 4 7]; % inisialisasi matrik A
B = [1 3; 5 9; 2 4]; % inisialisasi matrik B

% ---proses perkalian matrik----
E(1,1)=0;
for k=1:3
      E(1,1)=E(1,1)+A(1,k)*B(k,1);
end
E(1,2)=0;
for k=1:3
      E(1,2)=E(1,2)+A(1,k)*B(k,2);
end
E(2,1)=0;
for k=1:3
      E(2,1)=E(2,1)+A(2,k)*B(k,1);
end
E(2,2)=0;
for k=1:3
      E(2,2)=E(2,2)+A(2,k)*B(k,2);
end

% ---menampilkan matrik A, B dan E----
A
B
E
```