Fungsi Eksponensial Alami

A. Sejarah dan Konsep

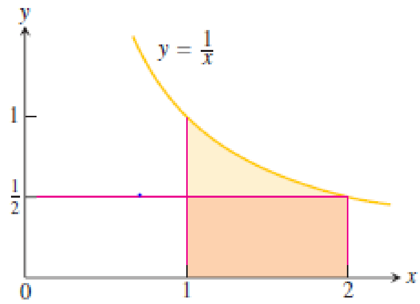
Fungsi eksponensial alami telah ada dan dikenal sejak zaman dahulu setelah ditemukannya fungsi logaritma alami. Salah satu konstanta yang dikenal adalah konstanta e yang merupakan basis dari logaritma alami dan nilainya tidak diketahui secara pasti, karena nilai dari konstanta e sama seperti konstanta π yang merupakan bilangan irrasional. Konstanta e pertama kali ditemukan oleh John Napier, seorang Matematikawan yang juga menemukan fungsi logaritma pada tahun 1614. Kemudian berangkat dari sana, Jacob Bernoulli mencoba menghitung nilai dari konstanta tersebut dengan pendekatan limit, dan dikaji bukan dengan melalui konsep logaritma, akan tetapi melalui studi bunga majemuk, yakni kenaikkan bunga bank yang kontinyu dan cenderung menaik tak terbatas. Setelah itu pada Tahun 1690-1691, dua orang Matematikawan Gottfried Leibniz dan Christian Huygens menggunakan konstanta tersebut dan melambangkannya dengan huruf b yang berarti *base* atau basis. Akan tetapi pada Tahun 1727, konstanta tersebut dipopulerkan oleh Leonhard Euler dan melambangkannya dengan huruf e, sehingga konstanta e disebut juga sebagai konstanta Euler atau juga disebut sebagai konstanta Napier sebagai penghargaan kepada ahli matematika, John Napier.

B. Fungsi Eksponensial Alami dan Sifat-Sifatnya

Sebelum membahas mengenai fungsi eksponensial alami beserta sifat-sifatnya, akan diperkenalkan terlebih dahulu definisi dari konstanta e. Nilai dari e merupakan suatu bilangan irrasional yang nilainya tidak dapat dipastikan, yakni $e \approx 2{,}71828182845904523536$. Beberapa definisi berikut ini akan menjelaskan lebih eksplisit lagi mengenai karakteristik nilai dari e.

Definisi 1. Konstanta e merupakan bilangan dalam daerah asal fungsi logaritma alami yang memenuhi

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$$



Gambar 1

Definisi lain dari konstanta e diberikan oleh limit suatu fungsi di titik nol, yakni:

Teorema 1. Konstanta irasional e didefinisikan sebagai limit dari $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ketika $x \to 0$, yaitu

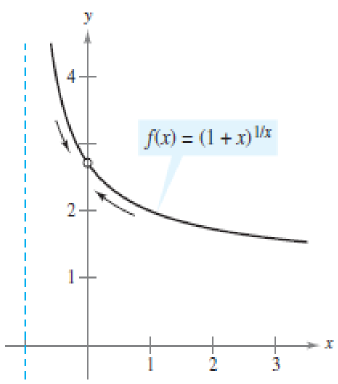
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Grafik dari fungsi $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ pada Gambar 2 memperlihatkan prilaku dari fungsi $f(x)$ untuk nilai x yang dekat dengan nol, perhatikan tabel berikut:

x	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$0{,}0001$	$0{,}001$	$0{,}01$
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	2,7320	2,7196	2,7184	2,7181	2,7169	2,7048

Tabel tersebut menunjukkan bahwa semakin dekat x dengan 0, maka $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ semakin dekat dengan e, sehingga $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Jika kita mengambil $n = \frac{1}{x}$, maka $n \to \infty$ berpadanan dengan $x \to 0^+$, sehingga bentuk alternatif dari konstanta e adalah

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



Gambar 2

Nilai dari e juga dapat direpresentasikan sebagai deret tak terhingga, yakni

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Lebih lanjut deret tersebut dipelajari di dalam bab deret tak hingga, yakni di dalam sub bab deret Maclaurin.

Selanjutnya akan dibahas lebih terperinci mengenai fungsi eksponensial alami beserta sifat-sifatnya. Perhatikan kembali fungsi logaritma alami $f(x) = \ln x, x > 0$. Karena $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, maka fungsi $f(x)$ monoton naik dan akibatnya $f(x)$ memiliki invers. Fungsi invers dari logaritma alami disebut sebagai fungsi eksponensial alami.

Definisi 2 (Fungsi Eksponensial Alami). Invers dari $\ln$ disebut sebagai fungsi eksponensial alami dan dinotasikan dengan exp, memenuhi

$$x = \exp y \leftrightarrow y = \ln x.$$

Berdasarkan definisi tersebut, dapat disimpulkan bahwa:

1. $\exp(\ln x) = x, \;\; x > 0$
2. $\ln(\exp y) = y,$ untuk setiap $y \in R$.

Selanjutnya perhatikan kembali Gambar 1 yang mengilustrasikan luas wilayah dibawah kurva $y = \frac{1}{x}$ diantara sumbu $x = 1$ dan $x = e$ yang memiliki luas sebesar 1 satuan. Karena $\ln e = 1$ maka berlaku $\exp 1 = e$. Jadi untuk sebarang x bilangan real kita dapat tuliskan

$$\exp x = \exp(x \ln e) = \exp(\ln e^x) = e^x$$

sehingga kita punya persamaan:

1. $e^{\ln x} = x, \; x > 0$
2. $\ln(e^y) = y,$ untuk setiap $y \in R$.

Fungsi eksponensial alami memiliki sifat-sifat tersendiri yang berbeda dengan fungsi yang lainnya, yaitu:

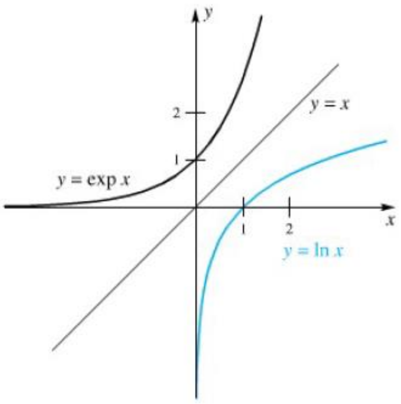
Teorema 2 (Sifat-Sifat Fungsi Eksponensial Alami). Misalkan a dan b sebarang bilangan real, maka

i. $e^a e^b = e^{a+b}$
ii. $e^a / e^b = e^{a-b}$

Bukti:

i. $e^a e^b = \exp(\ln e^a e^b) = \exp(lne^a + lne^b) = \exp(a + b) = e^{a+b}$
ii. $e^a / e^b = \exp\left(\ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right)\right) = \exp(lne^a - lne^b) = \exp(a - b) = e^{a-b}$

Karena fungsi $y = \exp x$ merupakan invers dari fungsi $y = \ln x$, maka grafiknya merupakan pencerminan dari grafik fungsi $y = \ln x$ terhadap garis $y = x$ yang disajikan dalam Gambar 3 berikut:



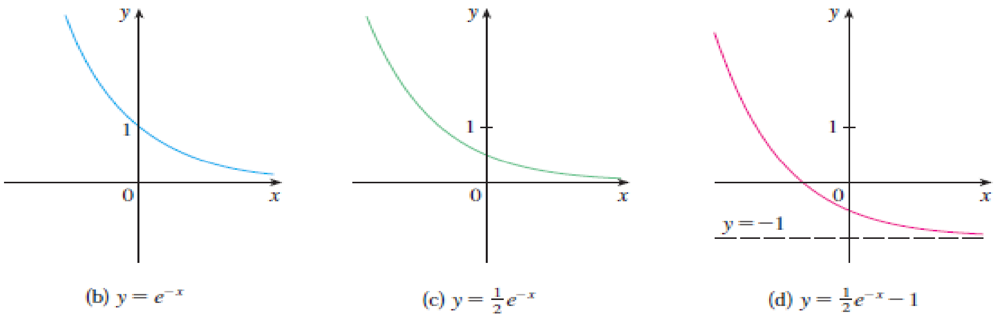
Gambar 3

Terlihat bahwa grafk fungsi $y = \exp x$ terdefinisi dan kontinu di setiap titik, serta merupakan fungsi monoton naik dan tak terbatas. Sehingga daerah asal fungsi $f(x) = \exp x$ adalah $(-\infty, \infty)$ dan daerah hasilnya adalah $(0, \infty)$, karena $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ maka $y = 0$ merupakan asimtot datar dari $f(x) = \exp x$.

Untuk memahami lebih lanjut mengenai penyajian grafik fungsi eksponensial alami, maka perhatikan contoh berikut:

Contoh 1. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} - 1$, kemudian tentukan daerah asal dan hasil dari fungsi tersebut.

Pembahasan: Kita mulai dengan menggambarkan grafik $y = e^x$, dengan mencerminkan $y = e^x$ terhadap sumbu$-y$ kita peroleh grafik fungsi $y = e^{-x}$ (dalam Gambar 4(b)), lebih lanjut didapat $y = \frac{1}{2} e^{-x}$ dalam Gambar 4(c). Kemudian dengan menggeser 1 satuan ke bawah, dan menimbang asimtot datar dari $y = \frac{1}{2} e^{-x} - 1$ yakni $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} e^{-x} - 1 = -1$, maka $y = -1$ merupakan asimtot datar untuk fungsi $y = \frac{1}{2} e^{-x} - 1$. Sehingga gambar grafik dari $y = \frac{1}{2} e^{-x} - 1$ adalah (lihat Gambar 4(d))



Gambar 4

C. Turunan serta Anti Turunan Fungsi Eksponensial Alami

Fungsi eksponensial alami merupakan fungsi yang kontinu di setiap titik, maka kita dapat menentukan turunan serta anti turunannya. Interpretasi turunan dari fungsi $f(x) = e^x$ di titik (a, b) menggambarkan kemiringan (gradien) fungsi tersebut di titik (a, b). Berikut ini menjelaskan mengenai aturan turunan serta anti turunan dari fungsi eksonensial alami:

Teorema 3 (Turunan Fungsi Eksponensial Alami). Turunan dari fungsi $f(x) = e^x$ adalah fungsi itu sendiri, dituliskan

$$D_x(e^x) = e^x.$$

Bukti: Definisikan

$$x = \ln y$$

selanjutnya diferensiasikan kedua ruas terhadap x, dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{1}{y} D_x y$$

oleh karena itu terbukti bahwa

$$D_x y = D_x(e^x) = y = e^x.$$

Lebih umum lagi, jika $u = f(x)$ terdiferensiasi, maka berdasarkan aturan rantai berlaku

$$D_x e^u = e^u D_x u.$$

Berdasarkan aplikasi turunan dalam menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dapat melihat karakteristik fungsi eksponensial alami berdasarkan turunannya. Karena turunan dari fungsi $f(x) = e^x$ adalah $f'(x) = e^x > 0$, maka fungsi $f(x)$ merupakan fungsi monoton naik, dan karena $f"(x) = e^x > 0$, maka fungsi $f(x)$ akan selalu cekung ke atas serta tidak memiliki titik belok.

Untuk pemahaman lebih lanjut mengenai aturan turunan fungsi eksponensial alami, perhatikan contoh di bawah ini:

Contoh 2. Tentukan $D_x(e^{x^2 \ln x})$

Pembahasan: Dengan menerapkan aturan rantai, maka

$$D_x\left(e^{x^2\ln x}\right) = e^{x^2\ln x} D_x(x^2\ln x) = e^{x^2\ln x}\left(x^2.\frac{1}{x} + 2x\ln x\right) = xe^{x^2\ln x}(1 + \ln x^2).$$

Selanjutnya untuk menentukan anti turunan dari fungsi eksponensial alami, kita berangkat kembali dari aturan turunan fungsi tersebut:

Teorema 4 (Anti Turunan Fungsi Eksponensial Alami). Anti turunan/Integral dari fungsi eksonensial alami didefinisikan sebagai

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Bukti: Karena $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$, maka dengan mengintegralkan kedua ruas didapatkan $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Dalam menyelesaikan integral fungsi eksponensial, dapat dilakukan dengan berbagai macam cara, yakni dengan substitusi, dengan cara langsung, ataupun dengan metode parsial.

Contoh 3. Hitunglah $\int_1^3 xe^{-3x^2} \, dx$.

Pembahasan: Msalkan $u = -3x^2$, $du = -6x \, dx$. Maka

$$\int xe^{-3x^2} \, dx = -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}(-6xdx) = -\frac{1}{6}\int e^u \, du = -\frac{1}{6}e^u + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$$

Sehingga berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus,

$$\int_{1}^{3} xe^{-3x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{6}e^{-3x^2}\right]_{1}^{3} = -\frac{1}{6}(e^{-27} - e^{-3}) \approx 0{,}0082978.$$

D. Aplikasi Fungsi Eksponensial Alami

Banyak aplikasi yang dapat diterapkan oleh fungsi eksponensial alami, mengingat karakteristik fungsi tersebut adalah fungsi yang monoton serta kontinu di setiap titik, maka salah satu aplikasinya adalah menentukan pertumbuhan jumlah populasi serta peluruhan suatu zat radioaktif.

1. Aplikasi dalam pertumbuhan jumlah populasi dan peluruhan.

Misalkan menaiknya Δy dalam populasi (kelahiran dikurangi kematian) selama waktu Δt bergantung terhadap ukuran populasi awal dalam satu periode dan dengan lamanya periode tersebut. Sehingga dapat didefinisikan $\Delta y = ky\Delta t$, atau

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

maka diperoleh persamaan differensial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Jika $k > 0$, maka populasi bertambah jumlahnya, dan jika $k < 0$, maka jumlah populasi akan menurun. Nilai dari konstanta k untuk populasi di seluruh dunia saat ini diberikan oleh $k = 0{,}0132$, dengan t merupakan ukuran waktu dalam tahun. Untuk mengetahui model eksponensial, kita harus menyelesaikan persamaan diferensial dari $\frac{dy}{dt} = ky$ dengan kondisi awal $y_0 = y$ ketika $t = 0$. Kita selesaikan persamaan differensial tersebut dengan menggunakan pemisahan variabel, yakni

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln y = kt + C$$

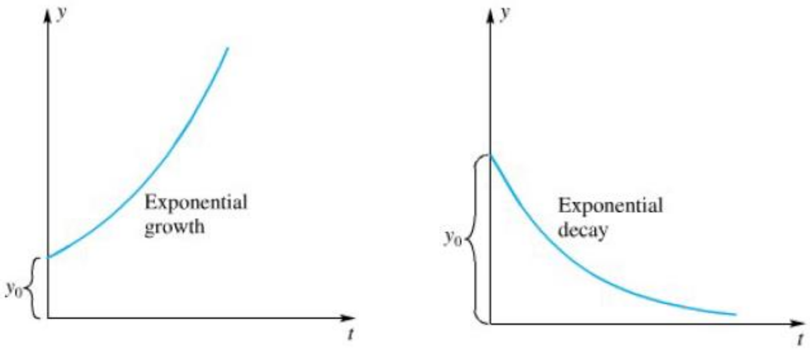
dengan mensubstitusikan $y = y_0$ ketika $t = 0$, maka didapat $C = \ln y_0$, sehingga

$$\ln y - \ln y_0 = kt$$

atau dapat dituliskan

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = kt$$

dengan mengeksponensialkan kedua ruas, maka kita punya solusi persamaan differensialnya menjadi $y = y_0 e^{kt}$. Jika $k > 0$, maka pertumbuhan tersebut dinamakan pertumbuhan eksponensial, dan jika $k < 0$ maka disebut sebagai peluruhan eksponensial.



Gambar 5

Definisi 3 (Model Eksponensial). Pertumbuhan eksponensial atau peluruhan eksponensial didefinisikan sebagai

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Dimana:

$y(t) =$ Banyaknya populasi y pada waktu t.

$y_0 =$ Nilai awal/banyaknya populasi pada waktu $t = 0$.

$k =$ Suatu konstanta dengan $k > 0$ untuk pertumbuhan eksponensial dan $k < 0$ untuk peluruhan eksponensial.

Contoh 4. Pertumbuhan penduduk di Asia Selatan memiliki rata-rata pertumbuhan sebesar 2,5%, jika populasi awalnya adalah sebesar 1,1 milyar, maka dalam berapa tahun jumlah populasi tersebut menjadi dua kali lipatnya?

Pembahasan: Diberikan model pertumbuhannya sebagai berikut

$$2{,}2 \text{ Milyar} = 1{,}1 \text{ Milyar}.\, e^{0{,}025t}$$

$$2 = e^{0,025t}$$

dengan menerapkan logaritma alami untuk kedua ruas, didapat

$$ln2 = 0,025t$$

$$0,693147 = 0,025t$$

sehingga diperoleh $t = \frac{0,693147}{0,025} \approx 27,7$. Jadi populasi bertambah menjadi 2,2 Milyar dalam waktu 27 tahun.

Model pertumbuhan yang telah dibahas sebelumnya bukanlah model matematika yang ideal, karena jika t terus membesar, maka jumlah populasi akan menuju ∞. Hal ini tentu tidak realistik. Jika jumlah individu terlalu banyak sedangkan jumlah makanan terbatas, tentunya akan ada banyak yang mati, sehingga model yang lebih baik bagi pertumbuhan populasi adalah model logistik.

Definisi 4 (Model Logistik). Jika diberikan nilai awal y dan k, L merupakan konstanta, maka model logistik diberikan oleh

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Solusi dari persamaan differensial tersebut adalah

$$y = \frac{L}{1 + ke^{-kLt}}$$

2. Aplikasi dalam bunga majemuk

Jika kita menyimpan uang Rp. 100.000 di bank dengan bunga majemuk sebesar 12% per bulan, maka akan bertambah menjadi $100.000(1,01)$ di akhir bulan pertama, $100.000(1,01)^2$ di akhir bulan kedua, dan $100.000(1,01)^{12}$ di akhir bulan ke 12. Lebih umum lagi, jika kita menyimpan A_0 rupiah di bank dengan bunga bank sebesar $100r$ persen per tahun, maka akan bertambah menjadi $A(t)$ rupiah di akhir tahun ke t. Model dari pertumbuhan bunga bank majemuk ini didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5 (Model Bunga Majemuk). Model pertumbuhan bunga majemuk didefinisikan sebagai

$$A(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Contoh 5. Misalkan Catherine menyimpan uang sebesar $\$500$ di bank dengan bunga majemuk sebesar 4% tiap harinya. Berapa banyak uang yang dia miliki di akhir tahun ketiga?

Pembahasan: Diberikan $r = 0{,}04$ dan $n = 365$, jadi

$$A = 500\left(1 + \frac{0{,}04}{365}\right)^{365(3)} \approx 563{,}74.$$

Maka banyaknya uang yang Catherine miliki di akhir tahun ketiga adalah sebesar $\$563{,}74$.

Sekarang kita lihat jika bunga majemuk tersebut bersifat kontinyu, artinya ketika n (jumlah periode dalam satu tahun) menuju tak terhingga, maka modelnya menjadi

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = A_0 \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{1/h}\right]^{rt} = A_0 e^{rt}.$$

Contoh 6. Misalkan permasalahan dalam Contoh 5 merupakan bunga majemuk yang kontinyu. Berapa banyak uang yang akan dimiliki Catherine di akhir tahun ketiga?

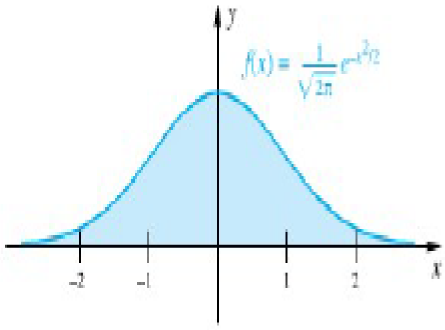
Pembahasan: Diberikan $A(t) = A_0 e^{rt} = 500e^{(0{,}04)(3)} \approx$ \$563,75. Jadi uang Catherine di akhir tahun ketiga menjadi sebesar \$563,75.

3. Aplikasi dalam bidang Statistika

Jika kita mendalami ilmu Statistika, maka kita akan mempelajari fungsi kepadatan peluang atau fungsi densitas peluang yang berguna untuk menjelaskan karakteristik dari distribusi peluang yang diberikan. Salah satu fungsi kepadatan tersebut adalah fungsi kepadatan peluang normal yang memuat fungsi eksponensial, diberikan oleh definisi berikut:

Definisi 6 (Fungsi Kepadatan Peluang Normal). Misalkan σ merupakan simpangan baku dan μ merupakan nilai rata-rata, maka fungsi densitas distribusi normal didefinisikan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



Gambar 6

Distribusi normal memiliki bentuk kurva yang sangat khas karena simetri terhadap sumbu$-y$. Parameter dari distribusi normal adalah μ dan varians σ^2. Untuk distribusi normal baku maka nilai dari $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ dan kurvanya seperti yang terlihat pada Gambar 6.

Fungsi Eksponensial

A. Sejarah dan Konsep

Eksponen berasal dari dua suku kata *Expo* dan *Ponere*. Expo berarti *berasal* atau *dari* dan ponere berarti *tempat dia sendiri*. Penggunaan kata eksponen dalam matematika modern tercatat pertama kali dalam buku *Arithemetica Integral* yang ditulis oleh seorang ahli matematika asal Inggris bernama Michael Stifel. Namun demikian saat itu istilah eksponen hanya digunakan untuk bilangan dasar 2. Jadi istilah eksponen 3 berarti 2^3 yang bernilai 8, berbeda dengan konsep eksponensial yang kita kenal sekarang ini. Secara umum, eksponen sendiri merupakan perkalian berulang, sehingga sangatlah membantu kita dalam mempersingkat bilangan yang relatif besar atau kecil, seperti contoh bilangan $1.000.000$ dapat dituliskan ke dalam bentuk eksponen menjadi 10^6. Fungsi eksponensial juga pertama kali ditemukan oleh seorang Matematikawan asal Skotlandia, John Napier. Napier menyadari bahwa setiap bilangan dapat diubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana, yakni bentuk eksponen dan logaritma yang menjadi latar belakang munculnya fungsi eksponensial dan fungsi ogaritma.

B. Fungsi Eksponensial dan Sifat-Sifatnya

Kita telah mengenal dengan baik fungsi aljabar beserta sifat-sifatnya, diantara fungsi aljabar yang sangat umum digunakan diantaranya

$$f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}, \text{ dan } h(x) = \sqrt{x}$$

masing masing fungsi tersebut memuat variabel dengan pangkat suatu konstanta. Jika kita mengubah aturan dan pangkatnya sehingga menjadi fungsi yang memuat konstanta dengan pangkat merupakan suatu variabel, maka kita akan peroleh fungsi yang disebut sebagai *fungsi eksponensial*. Sebagai contoh

$$f(x) = 2^x, g(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x, \text{ dan } h(x) = 3^{2x} = 9^x.$$

Definisi 7 (Fungsi Eksponensial). Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka fungsi eksponensial dengan basis a diberikan oleh $f(x) = a^x$.

Perhatikan pada Definisi 7 di atas, basis $a = 1$ tidak termasuk karena jika $f(x) = 1^x = 1$, maka fungsi $f(x)$ merupakan fungsi konstan.

Selanjutnya akan dibahas mengenai beberapa aturan-aturan dari fungsi eksponensial. Misalkan didefinsikan fungsi eksponensial $f(x) = a^x$, jika $x = n$ dengan n suatu bilangan bulat positif, maka

$$a^n = \underbrace{a.a.a \dots a}_{\text{Sebanyak } n \text{ kali}}$$

Jika $x = -n$ dengan n suatu bilangan bulat positif, maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Jika x merupakan bilangan rasional, dituliskan $x = \frac{p}{q}$ dimana p dan q merupakan bilangan bulat dan $q > 0$, maka

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Adapun hubungan dari fungsi eksponensial dengan fungsi eksponensial alami adalah

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

lebih lanjut disajikan ke dalam definisi berikut

Definisi 8. Untuk $a > 0$ dan sebarang bilangan real x, maka

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Jika kita menerapkan sifat dari fungsi logaritma alami maka akan diperoleh persamaan

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a.$$

Adapun sifat-sifat dari fungsi eksponensial mengikuti sifat-sifat dari fungsi eksponensial alami, yang diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 5 (Sifat-Sifat Fungsi Exponensial). Jika $a > 0, b > 0$, x dan y merupakan bilangan real, maka

i. $a^x a^y = a^{x+y}$

ii. $(a^x)^y = a^{xy}$

iii. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

iv. $(ab)^x = a^x b^x$

v. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Bukti:

i. $a^x a^y = e^{\ln(a^x a^y)} = e^{\ln a^x + \ln a^y} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y)\ln a} = a^{x+y}$.

ii. $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{yx \ln a} = a^{yx} = a^{xy}$.

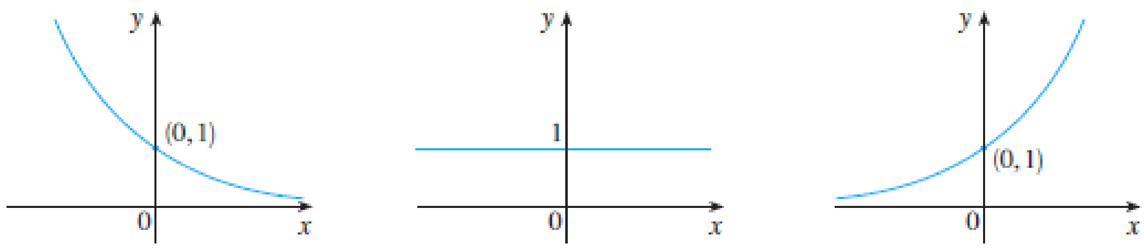
iii. $\frac{a^x}{a^y} = e^{\ln(a^x/a^y)} = e^{\ln a^x - \ln a^y} = e^{x\ln a - y\ln a} = e^{(x-y)\ln a} = a^{x-y}$

iv. $(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x\ln a + x\ln b} = e^{x\ln a}e^{x\ln b} = a^x b^x$

v. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x\ln(a/b)} = e^{x(\ln a - \ln b)} = e^{x\ln a - x\ln b} = \frac{e^{x\ln a}}{e^{x\ln a}} = \frac{a^x}{b^x}.$

Grafik fungsi eksponensial dapat digambarkan dengan mem*plot*kan semua titik-titk dalam daerah asalnya seperti menggambarkan grafik fungsi aljabar pada umumnya. Adapun perbedaan karakteristik dari grafik fungsi eksponensial dengan grafik dari fungsi aljabar, yakni grafik dari fungsi $f(x) = a^x$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Grafiknya melalui titik $(0,1)$, karena $a^0 = 1$.
- Jika $a > 0$, maka $f(x) = a^x$ terdefinisi untuk setiap bilangan $x \in R$, sehingga daerah asalnya adalah $(-\infty, \infty)$.
- Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka fungsi $f(x) = a^x$ menaik tak terbatas dan tidak pernah menyentuh sumbu$-x$, ini menunjukkan bahwa daerah hasil dari $f(x) = a^x$ adalah $(0, \infty)$.
- Jika $a > 1$, nilai dari a^x akan menaik selama x menaik (lihat Gambar 7(c)), dan jika grafik tersebut dilihat dari kanan ke kiri maka fungsi $f(x) = a^x$ akan terlihat menurun menuju nol, tetapi tidak akan pernah menyentuh $y = 0$, sehingga sumbu$-x$ merupakan asimtot datar dari fungsi $f(x) = a^x$. Jadi untuk $x \to \infty$ maka $a^x \to \infty$ dan ketika $x \to -\infty$ maka $a^x \to 0$.
- Jika $0 < a < 1$, nilai dari a^x akan menurun selama x menaik (lihat Gambar 7(a)), sehingga jika grafik tersebut dilihat dari kiri ke kanan, grafik $f(x) = a^x$ akan terlihat menurun menuju nol tetapi tidak menyentuh $y = 0$, dan jika grafiknya dilihat dari kanan ke kiri, maka fungsi tersebut akan terlihat menaik.
- Jika $a = 1$, maka $f(x) = 1^x$ merupakan fungsi konstan (Gambar 7(b)).



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

Gambar 7

Untuk menentukan asimtot datar dari fungsi eksponensial, maka harus diperhatikan cara menyelesaikan limit fungsi eksponensial tersebut ketika $x \to +\infty$ dan $x \to -\infty$ yang diberikan oleh:

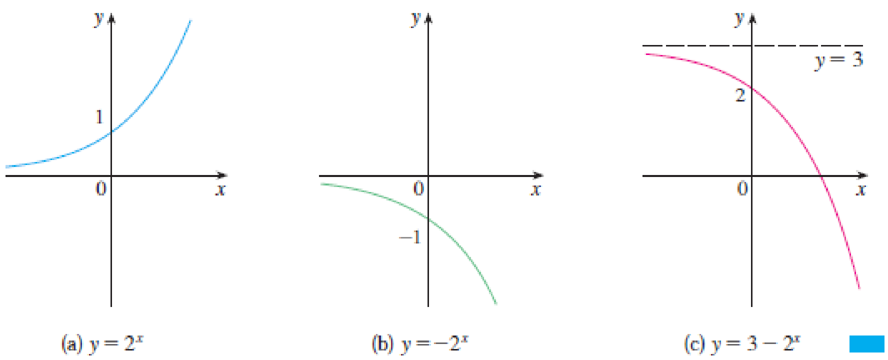
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{jika } a > 1 \\ 1, & \text{jika } a = 1 \\ 0, & \text{jika } 0 < \mathrm{a} < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{jika } a > 1 \\ 1, & \text{jika } a = 1 \\ +\infty, & \text{jika } 0 < \mathrm{a} < 1 \end{cases}$$

Sebagai contoh jika diberikan basis $a = \frac{1}{2}$, maka $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

Contoh 7. Sketsakan grafik fungsi $y = 3 - 2^x$ dan tentukan daerah asal serta daerah hasil dari fungsi tersebut.

Pembahasan: Pertama kita gambarkan dahulu grafik $y = 2^x$ (terlihat dalam Gambar 8(a)), maka pencerminan dari $y = 2^x$ terhadap sumbu$-x$ merupakan grafik fungsi $y = -2^x$ (terlihat dalam Gambar 8(b)). Kemudian kita geser grafik $y = -2^x$ ke atas sebanyak 3 satuan, sehingga diperoleh grafik $y = 3 - 2^x$ dalam Gambar 8(c). Karena $\lim_{x\to-\infty} 3 - 2^x = 3$ maka $y = 3$ merupakan asimtot datar dari fungsi tersebut, sehingga daerah asal dari fungsi $y = 3 - 2^x$ adalah $(-\infty, \infty)$, dan daerah hasilnya adalah $(-\infty, 3)$.



Gambar 8

C. Turunan serta Anti Turunan Fungsi Eksponensial

Turunan dari fungsi eksponensial memiliki aturan yang berbeda dari aturan turunan fungsi aljabar, yakni:

Teorema 6 (Aturan Turunan Fungsi Eksponensial). Untuk setiap $a > 0$ maka

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

Bukti: Berdasarkan Definisi 8 kita punya

$$D_x(a^x) = D_x\left(e^{x\ln a}\right) = e^{x\ln a} D_x(x\ln a) = a^x \ln a.$$

Perhatikan bahwa turunan dari fungsi $f(x) = a^x$ adalah $f'(x) = a^x \ln a > 0$, maka fungsi $f(x)$ merupakan fungsi monoton naik, dan karena $f"(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$, maka fungsi $f(x)$ akan selalu cekung ke atas serta tidak memiliki titik belok.

Contoh 8. Carilah $D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right)$

Pembahasan: Dengan menggunakan aturan rantai, misalkan $u = \sqrt{x}$, maka

$$D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right) = 3^{\sqrt{x}} \ln 3 . D_x\left(\sqrt{x}\right) = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}.$$

Berdasarkan aturan turunan fungsi eksponensial yang telah dijelaskan sebelumnya, maka kita dapat menentukan aturan anti turunan untuk fungsi eksponensial tersebut.

Teorema 7 (Aturan Anti Turunan Fungsi Eksponensial).

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C, \qquad a \neq 1.$$

Bukti: Berdasarkan Teorema 6, kita peroleh

$$\int a^x lna\, dx = \ln a \int a^x dx = a^x + C^*$$

maka lebih lanjut,

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C, \qquad a \neq 1.$$

Berikut contoh penerapan dari aturan pada Teorema 7

Contoh 9. Tentukanlah $\int 2^{x^3} x^2\, dx$.

Pembahasan: Misalkan $u = x^3$, maka $du = 3x^2 dx$, sehingga

$$\int 2^{x^3} x^2\, dx = \frac{1}{3}\int 2^{x^3}(3x^2 dx) = \frac{1}{3}\int 2^u\, du = \frac{1}{3}\frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^3}}{3\ln 2} + C.$$

Kita telah belajar mengenai penyelesaian integral suatu fungsi yang berbentuk a^x dan x^a. Jika dihadapkan dengan kasus suatu fungsi yang berbentuk $f(x) = x^x$, maka terdapat dua cara untuk menyelesaikan integral dari fungsi $f(x) = x^x$.

Cara I. Kita dapat tuliskan $y = x^x = e^{x\ln x}$. Maka dengan menggunakan aturan rantai didapat

$$D_x(y) = e^{x\ln x} D_x(x\ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

Cara II. Dengan menggunakan teknik diferensiasi logaritmik, maka

$$y = x^x$$

$$\ln y = x\ln x$$

$$\frac{1}{y} D_x y = x.\frac{1}{x} + \ln x$$

$$D_x y = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

D. Aplikasi Fungsi Eksponensial

Aplikasi dari fungsi eksponensial biasa memiliki peran yang sama seperti fungsi eksponensial alami, terlebih lagi dalam masalah pertumbuhan dan peluruhan. Diketahui model eksponensial untuk pertumbuhan dan peluruhan diberikan oleh persamaan

$$y(t) = y_0 a^t$$

dengan $y_0 \neq 0, a > 0$, dan $a \neq 1$. Notasi $y(t)$ melambangkan jumlah populasi pada waktu t, dan y_0 merupakan banyaknya populasi di waktu awal (ketika $t = 0$). Jika $a > 1$, maka $y(t)$ merupakan model pertumbuhan eksponensial. Jika $0 < a < 1$, maka $y(t)$ merupakan model peluruhan eksponensial. Nilai dari a disebut sebagai basis fungsi eksponensial, atau sering juga disebut sebagai faktor pertumbuhan atau faktor peluruhan.

Contoh 10. Penelitian menyatakan bahwa jumlah bakteri akan menjadi dua kali lipat dalam setiap jamnya. Diberikan estimasi perhitungan pada pukul 15:00 sebanyak 12.000 bakteri, carilah estimasi banyaknya bakteri 3 jam sebelumnya, yaitu saat pukul 12:00, dan tuliskan model pertumbuhan eksponensial untuk jumlah bakteri pada pada waktu t.

Pembahasan: Misalkan waktu awal pada pukul 12:00 adalah $t = 0$, maka saat pukul 15:00 didefinisikan $t = 3$. Pertumbuhan pada setiap waktu t adalah dua kali lipat, maka faktornya adalah $a = 2$, sehingga $y(t) = y_0 2^t$. Karena $y(3) = 12.000$, maka kita bisa mendapatkan nilai dari y_0 sebagai berikut

$$12.000 = 8y_0$$

$$y_0 = 1500$$

Sehingga jumlah bakteri pada pukul 15:00 adalah sebesar 1.500, dengan model pertumbuhan eksponensialnya

$$y(t) = 1500(2)^t$$

Dalam kasus lain, diketahui bahwa zat radioaktif meluruh mengikuti laju eksponensial. Waktu paruh merupakan lamanya waktu yang digunakan agar zat radioaktif tersebut meluruh hingga setengahnya. Fungsi eksponensial yang memodelkan peluruhan yang diketahui nilai paruh waktunya h, diberikan oleh persamaan $y(t) = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^k$, lebih lanjut diberikan dalam definisi berikut

Definisi 9 (Rumus Paruh Hidup). Jika diberikan jumlah awal y_0 dari zat yang meluruh, maka jumlah zat tersebut pada waktu t diberikan oleh model peluruhan eksponensial

$$y(t) = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

dengan faktornya adalah $\frac{1}{2}$ dan k melambangkan jumlah paruh hidup yang terjadi.

Jika t melambangkan lamanya waktu, maka jumlah dari paruh hidup didefinisikan oleh $\frac{t}{h}$. Sebagai contoh, jika paruh hidup dari suatu zat adalah 25 hari dan lamanya waktu yang telah berlalu setelah y_0 adalah 75 hari, maka jumlah paruh hidup adalah $k = \frac{t}{h} = \frac{75}{25} = 3$. dan jumlah zat yang tersisa diberikan oleh persamaan $y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{y_0}{8}$.

DAFTAR PUSTAKA

Larson, Ron., *Applied Calculus for The Life and Social Sciences*, Houghton Mifflin Harcourt, New York, 2009.

Purcell, E.J., Verberg, D., dan Rigdon, S.E., *Calculus: 9th Edition*, Prentice Hall, Inc, 2007.

Stewart, James., *Calculus Early Transcendentals: 7th Edition*, Brooks/Cole, USA, 2012.

Thomas, G.B., *Calculus Early Transcendentals: 12th Edition*, Addison-Wesley, New York. 2010.