Bab 3
Metode Eliminasi Gauss

✍ **Objektif :**
⊲ Mengenalkan sistem persamaan linear.
⊲ Mengenalkan teknik triangularisasi dan substitusi mundur.
⊲ Aplikasi metode Eliminasi Gauss menggunakan matrik.
⊲ Membuat algoritma metode Eliminasi Gauss.
⊲ Menghitung invers matrik menggunakan metode Eliminasi Gauss.

3.1 Sistem persamaan linear

Secara umum, sistem persamaan linear dinyatakan sebagai berikut

$$P_n : \qquad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \tag{3.1}$$

dimana a dan b merupakan konstanta, x adalah variable, n = 1, 2, 3, ...
Berikut ini adalah sistem persamaan linear yang terdiri dari empat buah persamaan yaitu P_1, P_2, P_3, dan P_4

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
P_1 : & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4 \\
P_2 : & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
P_3 : & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\
P_4 : & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4
\end{array}$$

Problem dari sistempersamaan linear adalah bagaimana mencari nilai pengganti bagi variabel x_1, x_2, x_3, dan x_4 sehingga semua persamaan diatas menjadi benar. Langkah awal penyelesaian problem tersebut adalah dengan melakukan penyederhanaan sistem persamaan linear.

3.2 Teknik penyederhanaan

Ada banyak jalan untuk menyederhanakan sistem persamaan linear. Namun tantangannya, kita ingin agar pekerjaan ini dilakukan oleh komputer. Oleh karena itu, kita harus menciptakan algoritma yang nantinya bisa berjalan di komputer. Untuk mencapai tujuan itu, kita akan berpatokan pada tiga buah aturan operasi matematika, yaitu

- Persamaan P_i dapat dikalikan dengan sembarang konstanta λ, lalu hasilnya ditempatkan di posisi persamaan P_i. Simbol operasi ini adalah $(\lambda P_i) \rightarrow (P_i)$. Contoh

$$P_1 : \qquad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$$

jika λ = 2, maka

$$2P_1 : \qquad 2x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 8$$

- Persamaan P_j dapat dikalikan dengan sembarang konstanta λ kemudian dijumlahkan dengan persamaan P_i, lalu hasilnya ditempatkan di posisi persamaan P_i. Simbol operasi ini adalah (P_i- λP_j) → (P_i). Contoh

$$\begin{aligned} P_2 : \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2P_1 : \quad & 2x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 8 \end{aligned}$$

maka operasi (P_2- 2P_1) → (P_2) mengakibatkan perubahan pada P_2 menjadi

$$P_2 : \quad -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7$$

Dengan cara ini, maka variabel x_1 berhasil dihilangkan dari P_2. Upaya untuk menghilangkansuatu variabel merupakan tahapan penting dalam metode Eliminasi Gauss.

- Persamaan P_i dan P_j dapat bertukar posisi. Simbol operasi ini adalah (P_i).↔ (P_j). Contoh
-

$$\begin{aligned} P_2 : \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ P_3 : \quad & 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{aligned}$$

maka operasi (P_2) ↔ (P_3) mengakibatkan pertukaran posisi masing-masing persamaan, menjadi

$$\begin{aligned} P_2 : \quad & 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ P_3 : \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{aligned}$$

3.2.1 Cara menghilangkan sebuah variabel

Sebelum dilanjut, saya ingin mengajak anda untuk fokus memahami aturan operasi yang kedua. Misalnya ada 2 persamaan linear yaitu

$$\begin{aligned} P_1 : \quad & 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 3 \\ P_2 : \quad & 4x_1 + 7x_2 - x_3 + 6x_4 = 9 \end{aligned}$$

Kemudian anda diminta untuk menghilangkan variabel x_1 dari P_2. Itu artinya, anda diminta untuk memodifikasi P_2 sedemikian rupa sehingga didapat P_2 yang baru, yang didalamnya tidak ada x_1.

Berdasarkan rumus operasi (P_i-λP_j) → (P_i) , maka operasi yang tepat adalah (P_2-4/3P_1) →(P_2). Perhatikan! Bilangan λ, yaitu 4/3, harus dikalikan dengan P_1, BUKAN dengan P_2. Sedangkan angka 4/3 adalah satu-satunya angka yang bisa menghapus variabel x_1 dari P_2 lewat operasi (P_2-4/3P_1). Selengkapnya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} P_2 : \quad & 4x_1 + 7x_2 - x_3 + 6x_4 = 9 \\ \frac{4}{3}P_1 : \quad & \frac{4}{3}3x_1 + \frac{4}{3}2x_2 - \frac{4}{3}5x_3 + \frac{4}{3}8x_4 = \frac{4}{3}3 \end{aligned}$$

Kemudian, hasil operasi (P_2-4/3P_1) disimpan sebagai P_2 yang baru

$$P_2 : \quad \left(4 - \frac{4}{3}3\right)x_1 + \left(7 - \frac{4}{3}2\right)x_2 - \left(1 - \frac{4}{3}5\right)x_3 + \left(6 - \frac{4}{3}8\right)x_4 = \left(9 - \frac{4}{3}3\right)$$

Dengan sendirinya x_1 akan lenyap dari P2. Mudah-mudahan jelas sampai disini. Demikianlah cara untuk menghilangkan x_1 dari P2.

3.2.2 Permainan indeks

Sekarang, mari kita tinjau hal yang sama, yaitu menghilangkan x_1 dari P_2, namun menggunakan 'permainan' indeks. Secara umum, P_1 dan P_2 bisa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} P_1: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &=& \; a_{15} \\ P_2: \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &=& \; a_{25} \end{aligned}$$

Agar x_1 hilang dari P_2, operasi yang benar adalah $(P_2 - \lambda P_1) \rightarrow (P_2)$, dimana $\lambda = \frac{a21}{a11}$. Dengan demikian, P_2 yang baru akan memenuhi

$$P_2: \left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \left(a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{14}\right)x_4 = \left(a_{25} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{15}\right)$$

Perhatikanlah variasi indeks pada persamaan diatas. Semoga intuisi anda bisa menangkap keberadaan suatu pola perubahan indeks. Jika belum, mari kita kembangkan persoalan ini. Sekarang saya ketengahkan kehadapan anda tiga buah persamaan, yaitu P_1, P_2 dan P_3

$$\begin{aligned} P_1: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &=& \; a_{15} \\ P_2: \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &=& \; a_{25} \\ P_3: \quad & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &=& \; a_{35} \end{aligned}$$

Bagaimana cara menghilangkan x_1 dari P_3 dengan memanfaatkan P_1??
Begini caranya, $(P_3 - \lambda P_1) \rightarrow (P_3)$, dengan $\lambda = \frac{a31}{a11}$

$$P_3: \left(a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1 + \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \left(a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14}\right)x_4 = \left(a_{35} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{15}\right)$$

Mudah-mudahan, pola perubahan indeksnya semakin jelas terlihat. Selanjutnya jika ada persamaan P_4 yang ingin dihilangkan x_1 nya dengan memanfaatkan P, bagaimana caranya? Tentu saja operasinya adalah $(P_4 - \lambda P_1) \rightarrow (P_4)$, dengan $\lambda = \frac{a41}{a11}$

$$P_4: \left(a_{41} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1 + \left(a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \left(a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{14}\right)x_4 = \left(a_{45} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{15}\right)$$

3.3 Triangularisasi dan Substitusi Mundur

3.3.1 Contoh pertama

Sekarang, mari kita kembali kepada sistem persamaan linear yang sudah ditulis di awal bab Ini

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} P_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4 \\ P_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ P_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & \text{-3} \\ P_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

Sekali lagi saya tegaskan bahwa problem dari sistem persamaan linear adalah bagaimana mendapatkan angka-angka yang bisa menggantikan variabel x_1, x_2, x_3, dan x_4 sehingga semuapersamaan di atas menjadi benar. Dengan berpegang pada ketiga teknik penyederhanaan tadi, maka sistem persamaan linear di atas dapat disederhanakan dengan langkah-langkah berikut ini:

1. Gunakan persamaan P_1 untuk menghilangkan variabel x_1 dari persamaan P_1, P_2, P_3 dan P_4 dengan cara (P_2- 2P_1) → (P_2), (P_3- 3P_1) → (P_3) dan (P_4+ P_1) → (P_4). Hasilnya akan seperti ini

$$\begin{aligned}
P_1 &: & x_1 + x_2 + 3x_4 &= 4, \\
P_2 &: & -x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7, \\
P_3 &: & -4x_2 - x_3 - 7x_4 &= -15, \\
P_4 &: & 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 8
\end{aligned}$$

   Silakan anda cermati bahwa x_1 kini telah hilang dari P_2, P_3 dan P_4

   .

2. Gunakan persamaan P_2 untuk menghilangkan variabel x_2 dari persamaan P_3 dan P_4 dengan cara (P_3- 4P_2) → (P_3) dan (P_4+3P_2) → (P_4). Hasilnya akan seperti ini

$$\begin{aligned}
P_1 &: & x_1 + x_2 + 3x_4 &= 4, \\
P_2 &: & -x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7, \\
P_3 &: & 3x_3 + 13x_4 &= 13, \\
P_4 &: & -13x_4 &= -13
\end{aligned}$$

   X4=1
   X3=0
   X2=2
   X1=-1

   Kalau x_3 masih ada di persamaan P_4, dibutuhkan satu operasi lagi untuk menghilangkannya. Namun hasil operasi pada langkah ke-2 ternyata sudah otomatis menghilangkan x_3 dari P_4. Bentuk akhir dari sistem persamaan linear di atas, dikenal sebagai bentuk **triangular**.
   Sampai dengan langkah ke-2 ini, kita berhasil mendapatkan sistem persamaan linear yang lebih sederhana. Apa yang dimaksud dengan sederhana dalam konteks ini? Suatu sistem persamaan linear dikatakan sederhana bila kita bisa mendapatkan seluruh nilai pengganti variabelnya dengan cara yang lebih mudah atau dengan usaha yang tidak memakan waktu lama dibandingkan sebelum disederhanakan.

3. Selanjutnya kita jalankan proses **backward-substitution** untuk mendapatkan angka-angka pengganti bagi x_1, x_2, $x_3$dan x_4. Melalui proses **backward-substitution**, yang pertama kali didapat adalah angka pengganti bagi variabel x_4, kemudian x_3, lalu diikuti x_2, dan akhirnya x_1. Silakan cermati yang berikut ini

$$
\begin{aligned}
P_4: &\quad x_4 = \frac{-13}{-13} &=& \ 1, \\
P_3: &\quad x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) &=& \ \frac{1}{3}(13 - 13) = 0, \\
P_2: &\quad x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) &=& \ -(-7 + 5 + 0) = 2, \\
P_1: &\quad x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 &=& \ 4 - 3 - 2 = -1
\end{aligned}
$$

Jadi solusinya adalah $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ dan $x_4 = 1$. Coba sekarang anda cek, apakah semua solusi ini cocok dan tepat bila dimasukan ke sistempersamaan linear yang pertama, yaitu yang belum disederhanakan?

OK, mudah-mudahan ngerti ya... Kalau belum paham, coba dibaca sekali lagi. Atau, sekarang kita beralih kecontoh yang lain.

3.3.2 Contoh kedua

Diketahui sistem persamaan linear, terdiri dari empat buah persamaan yaitu P_1, P_2, P_3, dan P_4 seperti berikut ini:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
P_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8 \\
P_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20 \\
P_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2 \\
P_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4
\end{array}
$$

Seperti contoh pertama, solusi sistempersamaan linear di atas akan dicari dengan langkah-langkah berikut ini:

1. Gunakan persamaan P_1 untuk menghilangkan x_1 dari persamaan P_2, P_3, P_4 dengan cara $(P_2\text{-}2P_1) \rightarrow (P_2)$, $(P_3\text{-}3P_1) \rightarrow (P_3)$ dan $(P_4\text{-}4P_1) \rightarrow (P_4)$. Hasilnya akan seperti ini

$$
\begin{aligned}
P_1: &\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &=& \ -8, \\
P_2: &\quad -x_3 - x_4 &=& \ -4, \\
P_3: &\quad 2x_2 - x_3 + x_4 &=& \ 6, \\
P_4: &\quad 2x_3 + 4x_4 &=& \ 12
\end{aligned}
$$

   Perhatikan persamaan P2! Akibat dari langkah yang pertama tadi, ternyata tidak hanya x1 saja yang hilang dari persamaan P2, variabel x2 pun turut hilang dari persamaan P2. Kondisi ini bisa menggagalkan proses triangularisasi. Untuk itu, posisi P2 mesti ditukar dengan persamaan yang berada dibawahnya, yang masih memiliki variabel x2. Maka yang paling cocok adalah ditukar dengan P3.

2. Tukar posisi persamaan P2 dengan persamaan P3, $(P_2 \leftrightarrow P_3)$. Hasilnya akan seperti ini

$$
\begin{aligned}
P_1: &\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &=& \ -8, \\
P_2: &\quad 2x_2 - x_3 + x_4 &=& \ 6, \\
P_3: &\quad -x_3 - x_4 &=& \ -4, \\
P_4: &\quad 2x_3 + 4x_4 &=& \ 12
\end{aligned}
$$

3. Agar sistem persamaan linear di atas menjadi berbentuk triangular, maka kita harus menghilangkan variabel x_3 dari persamaan P_4. Karenanya, gunakan persamaan P_3 untuk menghilangkan x_3 dari persamaan P_4 dengan cara $(P_4 + 2P_3) \rightarrow (P_4)$. Hasilnya akan seperti ini

$$
\begin{aligned}
P_1: &\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &=& \ -8, \\
P_2: &\quad 2x_2 - x_3 + x_4 &=& \ 6, \\
P_3: &\quad -x_3 - x_4 &=& \ -4, \\
P_4: &\quad 2x_4 &=& \ 4
\end{aligned}
$$

Sampai disini proses triangularisasi telah selesai.

4. Selanjutnya adalah proses backward-substitution. Melalui proses ini, yang pertama kali didapat solusinya adalah x_4, kemudian x_3, lalu diikuti x_2, dan akhirnya x_1.

$$\begin{aligned}
P_4 : & \quad & x_4 = \frac{4}{2} &= 2, \\
P_3 : & \quad & x_3 = \frac{-4 + x_4}{-1} &= 2, \\
P_2 : & \quad & x_2 = \frac{6 + x_3 - x_4}{2} &= 3, \\
P_1 : & \quad & x_1 = -8 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -7
\end{aligned}$$

Jadi solusinya adalah $x_1 = -7$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$ dan $x_4 = 2$.

Berdasarkan kedua contoh di atas, untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linear, diperlukan operasi **triangularisasi** dan proses **backward-substitution**. Kata **backward-substitution** kalau diterjemahkan kedalam bahasa indonesia, menjadi **substitusi-mundur**. Gabungan proses triangularisasi dan substitusi-mundur untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dikenal sebagai metode **Eliminasi Gauss**.

3.4 Matrik dan Eliminasi Gauss

3.4.1 Matrik Augmentasi

Sejumlah matrik bisa digunakan untuk menyatakan suatu sistem persamaan linear. Sejenak, mari kita kembali lagi melihat sistem persamaan linear secara umum seperti berikut ini:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Sementara, kalau dinyatakan dalam bentuk operasi matrik, maka akan seperti ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Dalam mencari solusi suatu sistem persamaan linear dengan metode eliminasi gauss, bentuk operasimatrik di atas dimanipulasi menjadi **matrik augment**, yaitu suatumatrik yang berukuran n x (n + 1) seperti berikut ini:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right] \tag{3.3}$$

Inilah source code Matlab untuk membentuk matrik augmentasi yang terdiri atas matrik A dan vektor b,

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1  1  0  3
     2  1 -1  1
```

```
     3 -1 -1  2
    -1  2  3 -1];

%---- inisialisasi vektor b ----
b = [4 ; 1 ; -3 ; 4];

%---- membentuk matrik augmentasi ----
dim = size(A);
n = dim(1);
for i = 1:n
     A(i,n+1) = b(i);
end
```

3.4.2 Penerapan pada contoh pertama

Pada contoh pertama di atas, diketahui sistem persamaan linear yang terdiri dari empat buah persamaan yaitu P_1, P_2, P_3, dan P_4

$P_1 : x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$

$P_2 : 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$

$P_3 : 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$

$P_4 : -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$

Sistem persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Setelah itu matrik augment disusun seperti ini (perhatikan angka-angka indeks pada matriks disebelahnya)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]$$

Kemudian kita lakukan operasi triangularisai terhadap matrik augment, dimulai dari kolom pertama (yang tujuannya untuk menghilangkan variabel x_1 dari P_2, P_3, dan P_4), yaitu

$$P_2 : \left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \left(a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{14}\right)x_4 = \left(a_{25} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{15}\right)$$

$$P_3 : \left(a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1 + \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \left(a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14}\right)x_4 = \left(a_{35} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{15}\right)$$

$$P_4 : \left(a_{41} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1 + \left(a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \left(a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{14}\right)x_4 = \left(a_{45} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{15}\right)$$

Sekarang akan saya tulis *source code* Matlab untuk menyelesaikan perhitungan diatas. Saran saya, anda jangan hanya duduk sambilmembaca buku ini, kalau bisa nyalakan komputer/laptop dan ketik ulang *source-code* ini agar anda memperoleh *feeling*-nya! OK, mari kita mulai.

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1  1  0  3
     2  1 -1  1
     3 -1 -1  2
     -1 2  3 -1];

%---- inisialisasi vektor b ----
b = [4 ; 1 ; -3 ; 4];

%---- membentuk matrik augmentasi ----
dim = size(A);
n = dim(1);
for i = 1:n
     A(i,n+1) = b(i);
end

%---- menghilangkan variabel x1 ----
m=A(2,1)/A(1,1); % huruf m mewakili simbol lambda
A(2,1)=A(2,1)-m*A(1,1);
A(2,2)=A(2,2)-m*A(1,2);
A(2,3)=A(2,3)-m*A(1,3);
A(2,4)=A(2,4)-m*A(1,4);
A(2,5)=A(2,5)-m*A(1,5);

m=A(3,1)/A(1,1); % huruf m mewakili simbol lambda
A(3,1)=A(3,1)-m*A(1,1);
A(3,2)=A(3,2)-m*A(1,2);
A(3,3)=A(3,3)-m*A(1,3);
A(3,4)=A(3,4)-m*A(1,4);
A(3,5)=A(3,5)-m*A(1,5);

m=A(4,1)/A(1,1); % huruf m mewakili simbol lambda
A(4,1)=A(4,1)-m*A(1,1);
A(4,2)=A(4,2)-m*A(1,2);
A(4,3)=A(4,3)-m*A(1,3);
A(4,4)=A(4,4)-m*A(1,4);
A(4,5)=A(4,5)-m*A(1,5);

A
b
```

Hasilnya akan seperti ini

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & | & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & | & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & | & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & | & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & | & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & | & a_{45} \end{bmatrix}$$

Pada kolom pertama, seluruh elemen berubah menjadi nol (a_{21} = 0, a_{31} = 0, dan a_{41} = 0) kecuali elemen yang paling atas a_{11}. Itu berarti kita sudah menghilangkan variabel x_1 dari P_2, P_3, dan P_4. Sekarang dilanjutkan ke kolom kedua, dengan operasi yang hampir sama, untuk membuat elemen a_{32} dan a_{42} bernilai nol

$$P_3 : \left(a_{31} - \frac{a_{32}}{a_{22}}a_{21}\right)x_1 + \left(a_{32} - \frac{a_{32}}{a_{22}}a_{22}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}}a_{23}\right)x_3 + \left(a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}}a_{24}\right)x_4 = \left(a_{35} - \frac{a_{32}}{a_{22}}a_{25}\right)$$

$$P_4 : \left(a_{41} - \frac{a_{42}}{a_{22}}a_{21}\right)x_1 + \left(a_{42} - \frac{a_{42}}{a_{22}}a_{22}\right)x_2 + \left(a_{43} - \frac{a_{42}}{a_{22}}a_{23}\right)x_3 + \left(a_{44} - \frac{a_{42}}{a_{22}}a_{24}\right)x_4 = \left(a_{45} - \frac{a_{42}}{a_{22}}a_{25}\right)$$

Source-*code* berikut ini adalah kelanjutan dari *source*-*code* diatas. Jadi jangan dipisah dalam file lain!!!

```
% Menghilangkan variable x2 dari persamaan P3 dan P4
m=A(3,2)/A(2,2);
 A(3,1)=A(3,1)-m*A(2,1);
 A(3,2)=A(3,2)-m*A(2,2);
 A(3,3)=A(3,3)-m*A(2,3);
 A(3,4)=A(3,4)-m*A(2,4);
 A(3,5)=A(3,5)-m*A(2,5);

 m=A(4,2)/A(2,2);
 A(4,1)=A(4,1)-m*A(2,1);
 A(4,2)=A(4,2)-m*A(2,2);
 A(4,3)=A(4,3)-m*A(2,3);
 A(4,4)=A(4,4)-m*A(2,4);
 A(4,5)=A(4,5)-m*A(2,5);
```

Hasilnya akan seperti dibawah ini. Itu berarti kita telah menghilangkan variabel x2 dari P3, dan P4; bahkan tanpa disengaja x3 juga hilang dari P4. Inilah bentuk **triangular**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & | & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & | & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & | & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & | & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & | & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & | & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & | & a_{45} \end{bmatrix}$$

Walaupun x_3 sudah hilang dari P_4, sebaiknya source-code penghapusan x_3 dari P_4 tetap ditambahkan pada source-code sebelumnya agar source-code tersebut menjadi lengkap.

```
 m=A(4,3)/A(3,3);
A(4,1)=A(4,1)-m*A(3,1);
A(4,2)=A(4,2)-m*A(3,2);
A(4,3)=A(4,3)-m*A(3,3);
```

```
A(4,4)=A(4,4)-m*A(3,4);
A(4,5)=A(4,5)-m*A(3,5);
```

Dengan memperhatikan angka-angka indeks pada matrik augment di atas, kita akan mencoba membuat rumusan proses substitusi-mundur untuk mendapatkan seluruh nilai pengganti variabel `x`. Dimulai dari `x4`,

$$x_4 = \frac{a_{45}}{a_{44}} = \frac{-13}{-13} = 1$$

lalu dilanjutkan dengan `x3`, `x2`, dan `x1`.

$$\begin{aligned}
x_3 = \frac{a_{35} - a_{34}x_4}{a_{33}} &= \frac{13 - [(13)(1)]}{3} = 0 \\
x_2 = \frac{a_{25} - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}} &= \frac{(-7) - [(-1)(0) + (-5)(1)]}{(-1)} = 2 \\
x_1 = \frac{a_{15} - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)}{a_{11}} &= \frac{4 - [(1)(2) + (0)(0) + (3)(1)]}{1} = -1
\end{aligned}$$

Inilah *source code* proses substitusi mundur sesuai rumusan di atas

```
x(4,1)=A(4,5)/A(4,4);
x(3,1)=(A(3,5)-A(3,4)*x(4,1))/A(3,3);
x(2,1)=(A(2,5)-(A(2,3)*x(3,1)+A(2,4)*x(4,1)))/A(2,2);
x(1,1)=(A(1,5)-
(A(1,2)*x(2,1)+A(1,3)*x(3,1)+A(1,4)*x(4,1)))/A(1,1);
```