6 PELUANG

JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUAN

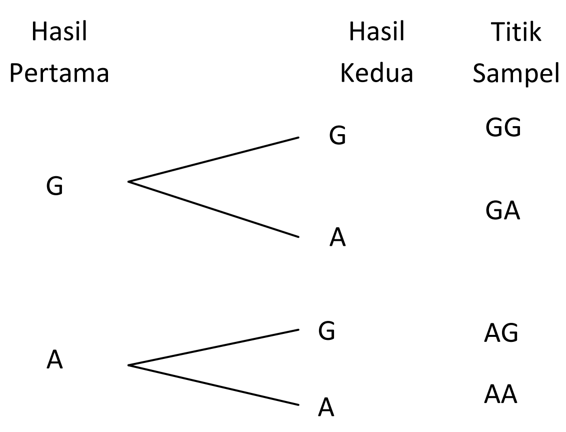
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Menghitung peluang dari suatu kejadian

Materi :

6.1. Istilah dalam peluang

1. **Percobaan** dalam statistika menyatakan tiap proses yang menghasilkan data mentah.
2. **Ruang sampel** adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika dan dinyatakan dalam lambang T.
3. **Unsur/anggota ruang sampel/titik sampel** adalah tiap hasil dalam ruang sampel.
   Ada beberapa alat untuk menentukan titik sampel dari suatu percobaan:
   a. Diagram Pohon
      Contoh:
      Suatu percobaan terdiri atas lantunan dua buah mata uang logam. Gunakan diagram pohon untuk menentukan semua titik sampel.



      Maka T = {GG, GA, AG, AA}

   b. Tabel
      Suatu percobaan terdiri atas lantunan dua buah mata uang logam. Gunakan tabel untuk menentukan semua titik sampel.

	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

Maka T = {GG, GA, AG, AA}

Untuk titik sampel yang tak hingga banyaknya ruang sampel lebih mudah ditulis dengan pernyataan atau simbol.
Contoh:
T = $\{x|x \text{ suatu kota yang berpenduduk melebihi satu juta}\}$
T = $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4\}$

4. **Kejadian** adalah himpunan bagian dari ruang sampel, dilambangkan dengan huruf kapital.
5. **Komplemen** suatu kejadian A terhadap T adalah himpunan suatu unsur T yang tidak termasuk A. Komplemen A dinyatakan dengan lambang $\mathbf{A^c}$**.**
6. **Irisan** dua kejadian A dan B, dinyatakan dengan lambang $A \cap B$, adalah kejadian yang unsurnya termasuk dalam A **dan** B.

   Dua kejadian A dan B dikatakan **saling terpisah** jika $A \cap B = \phi$, yakni jika A dan B tidak memiliki unsur persekutuan.
7. **Gabungan** dua kejadian A dan B, dinyatakan dengan $A \cup B$, ialah kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk A **atau** B atau keduanya.

Contoh:
Percobaanya: melantunkan sebuah dadu, sehingga ruang sampelnya $T = \{1,2,3,4,5,6\}$
Misal
Kejadian A adalah hasil lantunan suatu dadu yang dapat dibagi tiga. $A = \{3,6\}$
Kejadian B adalah hasil lantunan suatu dadu yang ganjil. $B = \{1,3,5\}$
Kejadian C adalah hasil lantunan suatu dadu yang genap. $C = \{2,4,6\}$
Maka
$A \cap B = \{3\}, B \cap C = \phi$
$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
6.2. Menghitung titik sampel

1. Faktorial

   Jika n adalah bilangan bulat positif maka n factorial dilambangkan, n!, yaitu
   $$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
   $$0! = 1 \text{ dan } 1! = 1$$
2. Permutasi

   Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari satu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya. (memperhatikan susunan AB dan BA dua titik sampel yang berbeda).

Banyaknya permutasi n benda berlainan bila diambil r sekaligus adalah

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh:

Dari 20 lotere, dua diambil untuk hadiah pertama dan kedua. Hitunglah banyak titik sampel dalam ruang T?

Jawab:

Banyak seluruh titik sampel

$${}_{20}P_2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \ldots \times 1}{18 \times 17 \times 16 \times \ldots \times 1} = 20 \times 19 = 380$$

1. Banyak permutasi n benda yang berlainan n!
2. Banyaknya permutasi n benda berlainan yang disusun melingkar adalah (n-1)!
3. Banyaknya permutasi yang berlainan dari n benda jika n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, …, n_k berjenis ke k adalah $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

   Contoh:

   Suatu pohon natal dihias dengan 9 bola lampu yang dirangkai seri. Ada berapa cara menyusun 9 bola lampu itu bila 3 diantaranya berwarna merah, 4 kuning, dan 2 biru?

   Jawab: $\frac{9!}{3!4!2!} = 1260 \text{ cara}$
4. Banyaknya cara menyekat suatu himpunan n benda dalam r sel, masing-masing berisi n_1 unsur dalam sel pertama, n_2 dalam sel kedua, dan seterusnya …, adalah $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

   Dengan $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

   Contoh:

   Berapa banyak cara untuk menampung 7 petinju dalam 3 kamar hotel, bila 1 kamar bertempat tidur 3 sedang, 2 lainnya punya 2 tempat tidur?

   Jawab:

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

3. Kombinasi

   Kombinasi (tidak memperhatikan urutan, AB dan BA adalah 1 titik sampel yang sama)

   Banyaknya kombinasi dari n benda yang berlainan bila diambil sebanyak r sekaligus adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

   Contoh:

   Bila ada 4 kimiawan dan 3 fisikawan, carilah banyaknya panitia 3 orang yang dapat dibuat yang beranggotakan 2 kimiawan dan 1 fisikawan.

   Jawab:

   Banyaknya cara memilih 2 kimiawan dari 4 adalah $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$

   Banyaknya cara memilih 1 fisikawan dari 3 adalah $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$

   Maka banyaknya kelompok yang mungkin adalah mn = (6)(3) =18

4. Aturan mn

   Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan m cara, dan jika untuk tiap cara ini operasi kedua dapat dikerjakan dengan n cara, maka kedua operasi itu dapat dikerjakan bersama-sama dengan mn cara.

   Contoh:
   Berapa banyak titik sampel dalam ruang sampel jika sepasang dadu dilantunkan sekali?
   Jawab:
   Dadu pertama dapat menghasilkan salah satu dari m = 6 posisi
   Untuk tiap posisi tersebut dadu kedua dapat pula menghasilkan n = 6 posisi.
   Jadi pasangan dadu itu dapat menghasilkan mn = (6)(6) = 36 posisi.

6.3. Definisi Peluang

Peluang suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A. Jadi

$$0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0 \text{ dan } P(T) = 1$$

Contoh:
Sebuah mata uang logam dilantunkan dua kali. Berapakah peluangnya bahwa paling sedikit muncul gambar sekali?
Jawab:
Ruang sampel percobaan ini: T = {GG,GA,AA,AG}
Tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul yang sama. Karena itu tiap titik sampel diberi **b** sehingga $4b = 1$ atau $b = 1/4$. Bila A menyatakan kejadian bahwa paling sedikit satu gambar muncul, maka
A = {GG, GA, AG}
Dan
$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Contoh:
Sebuah mata uang logam dilantunkan dua kali, mata uang tersebut diberati sehingga peluang muncul gambar 2 kali lebih besar dibanding peluang muncul angka. Bila K menyatakan kejadian munculnya gambar sedikitnya sekali, hitunglah P(K).
Jawab:
Ruang sampel untuk satu koin $T = \{G, A\}$. Misalkan bobot angka b maka bobot gambar adalah 2b. Karena jumlah semua bobot 1 maka $2b + b = 1$ atau $3b = 1 \leftrightarrow b = \frac{1}{3}$. Jadi angka berbobot ${}^{1}/_{3}$ sedangkan gambar genap berbobot. ${}^{2}/_{3}$. Ruang sampel untuk pelantunan koin dua kali $T = \{AA, AG, GA, GG\}$. Jadi

$$K = \{AG, GA, GG\}$$

Dan

$$P(GG) = P(G)P(G) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$
$$P(AG) = P(A)P(G) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$
$$P(GA) = P(G)P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

Maka $P(K) = P(GG) + P(AG) + P(GA) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

Jika suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, dan jika tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian A, maka peluang kejadian A adalah $P(A) = \frac{n}{N}$

Contoh:
Sekantung permen berisi 6 rasa jeruk , 4 rasa kopi, dan 2 rasa coklat. Jika seseorang mengambil satu permen secara acak, carilah peluangnya mendapat:

a. 1 rasa jeruk
b. 1 rasa kopi atau coklat

Jawab:

a. N = 13 dan n(J) = 6
   $P(J) = \frac{6}{13}$
b. N = 13 dan $n(K \cup C) = 6$
   $P(K \cup C) = \frac{6}{13}$

Contoh:
Dalam setangan pemain poker terdapat 5 kartu, hitunglah peluang mendapat 2 As dan 3 jack.
Jawab:
Banyak cara mendapat 2 As dari 4 As adalah
$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$
Dengan banyaknya cara mendapatkan 3 dari 4 jack adalah
$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$
Banyak titik sampel untuk kejadian 2 As dan 3 Jack = m.n = (6)(4) = 24
Banyak tangan kartu poker masing-masing berisi 5 kartu 52, semuanya kemungkinan sama, adalah
$N = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2.598.960$
Jadi peluang kejadian C mendapat 2 As dan 3 Jack
$P(C) = \frac{24}{2598960} = 0{,}9 \times 10^{-5}$

Penentuan bobot:

1. Frekuensi relatif/nisbi : cara penentuan bobot dengan mengurangi percobaan tak hingga banyaknya.
2. Subjektif : penentuan bobot begantung intuisi atau keyakinan seseorang.
   Dalam pembahasan peluang selajutnya penentuan bobot yang akan digunakan frekuensi relatif, lebih tepat lagi: **limit dari frekuensi relatif**.

6.4. Aturan Peluang

1. Bila A dan B dua kejadian sebarang, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Contoh:

Suatu dadu dilantunkan sekali. Bila K menyatakan kejadian munculnya suatu angka yang habis dibagi 3 dan L menyatakan kejadian munculnya suatu angka ganjil, hitunglah $P(K \cup L)$.

Jawab:

Ruang sampel $T = \{1,2,3,4,5,6\}$. Bobot untuk setiap titik sampel sama.

K = {3,6} sehingga $P(K) = \frac{2}{6}$; L = {1,3,5} sehingga $P(L) = \frac{3}{6}$; dan $K \cap L = \{3\}$ sehingga $P(K \cap L) = \frac{1}{6}$. Maka

$$P(K \cup L) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

2. Bila A dan B dua kejadian saling terpisah, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh

Suatu dadu dilantunkan sekali. Bila L menyatakan kejadian munculnya suatu angka ganjil dan M menyatakan kejadian munculnya angka genap kurang dari 5, hitung $P(L \cup M)$.

Jawab:

Ruang sampel $T = \{1,2,3,4,5,6\}$. Bobot untuk setiap titik sampel sama.

$L = \{1,3,5\}$ sehingga $P(L) = \frac{3}{6}$ dan $M = \{2,4\}$ sehingga $P(L^c) = \frac{2}{6}$ dan kita ketahui bahwa $L \cap L^c = \{\quad\}$, maka L dan L^c adalah dua kejadian saling terpisah, maka

$$P(L \cup L^c) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

3. Bila A_1, A_2, A_3, …, A_n, saling terpisah, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

4. Bila A, B, dan C kejadian sebarang, maka

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Contoh:

P(lulus matematika) = $\frac{2}{3}$ dan P(lulus biologi) = $\frac{4}{9}$, jika P(keduanya) = $\frac{1}{4}$.

Berapa peluang lulus paling sedikit satu mata kuliah?

Jawab:

$$P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

5. Bila A dan A^c kejadian yang saling berkomplementer, maka $P(A) + P(A^c) = 1$

Contoh

Suatu dadu dilantunkan sekali. Bila L menyatakan kejadian munculnya suatu angka ganjil dan L^c adalah komplemen dari L, hitunglah $P(L) + P(L^c)$.

Jawab:

Ruang sampel $T = \{1,2,3,4,5,6\}$. Bobot untuk setiap titik sampel sama.

$L = \{1,3,5\}$ sehingga $P(L) = \frac{3}{6}$ dan $L^c = \{2,4,6\}$ sehingga $P(L^c) = \frac{3}{6}$, maka

$$P(L) + P(L^c) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

6.5. Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat B bila A diketahui, dinyatakan dengan $P(B|A)$ ditentukan oleh
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, bila $P(A) > 0$

Contoh:

Misalkan ruang sampel menyatakan populasi orang dewasa yang telah tamat SMA di suatu kota kecil. Mereka dikelompokkan menurut jenis kelamin dan status pekerjaan berikut.

	Bekerja	Tidak bekerja	Jumlah
L	460	40	500
W	140	260	400
Σ	600	300	900

Daerah tersebut akan dijadikan daerah pariwisata dan seseorang akan dipilih secara acak untuk mempropagandakannya ke seluruh negeri. Kita ingin meneliti kejadian berikut:

M = lelaki yang terpilih

E = orang yang terpilih dalam status bekerja.

Jawab:

$P(E \cap M)$dan P(E) diperoleh dari ruang sampel T.

$$P(E \cap M) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$$

Jadi

$$P(M|E) = \frac{23/45}{2/3} = \frac{23}{30}$$

Dua **kejadian** A dan B **bebas** jika dan hanya jika

$$P(B|A) = P(B)$$

Dan

$$P(A|B) = P(A)$$

Jika A dan B kejadian saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Contoh:

Suatu kota kecil mempunyai satu mobil pemdan kebakaran dan satu ambulans untuk keadaan darurat. Peluang mobil pemadam kebakaran siap waktu diperlukan 0.98 peluang ambulans siap waktu dipanggil 0.92. Dalam kejadian ada kecelakaan karena kebakaran gedung, cari peluang keduanya siap.

Jawab:

Misalkan A dan B menyatakan masing-masing kejadian mobil pemadan kebakaran dan ambulans siap. Maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$$

6.6. Ekspektasi

Misalkan k adalah sejumlah peristiwa yang dapat terjadi dalam suatu eksperimen. Sedangkan probabilitas terjadinya setiap peristiwa masing-masing adalah $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ untuk setiap peristiwa dengan probabilitas tersebut terdapat satuan-satuan $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$yang harganya dapat berupa nol, dapat positif atau negatif. Sedemikian rupa sehingga $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Maka ekspektasinya didefinisikan sebagai : $\xi = p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots + p_k d_k = \sum_{i=1}^{k} p_i d_i$

Contoh:

A dan B bertaruh jika uang logam yang muncul gambar A akan memberi B 500, jika yang muncul angka B akan memberi A 500. Dari permainan ini, maka untuk A menang 500, probabilitas $1/2$, kalah 500 dengan probabilitas $1/2$, sehingga ekspektasi untuk A adalah:

$$\xi(\text{untuk A}) = p_1 d_1 + p_2 d_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(500) + \left(\frac{1}{2}\right)(-500) = 0$$

Berarti, untuk jangka panjang dalam permainan ini, A dan B masing-masing menang nol rupiah.

Contoh:

Bila dua uang logam dilantunkan 16 kali dan X menyatakan banyaknya muncul gambar per lantunan maka X dapat berharga 0, 1, dan 2. Misalkan percobaan itu menghasilkan tidak ada gambar, satu gambar, dan dua gambar, masing-masing, sebanyak 4, 7, dan 5 kali. Berapa ekspetasi muncul gambar?

Jawab:

Ruang sampelnya $T = \{AG, GA, GG, AA\}$. Karena ke 4 titik sampel berpeluang sama maka

$P(X = 0) = P(AA) = \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = P(GA) + P(AG) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P(GG) = \frac{1}{4}$

Maka $\xi(X) = (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

Ini berarti bahwa bila seseorang melantunkan dua uang logam berulang-ulang maka, rata-ratanya, dia mendapat satu gambar per lantunan

Daftar Pustaka

Mendenhall, W., Beaver, R., Beaver, B. 2006. *Introduction to Probability and Statistics*. USA: Thomson Brooks/Cole

Panggabean, Luhut. 2000. *Statistika Dasar*. Bandung: UPI

Sudjana. 2005. *Metode Statistika*. Bandung: Tarsito

Walpole, R., Myers, R. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB