Penyelesaian 4.7 :

Diketahui persamaan bola $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 12z + 68 = 0$, maka diperoleh data $A = -10$, $B = -8$, $C = -12$ dan $D = 68$, karena

♦. $A = -2a \Rightarrow -2a = -10 \Rightarrow a = 5$

♦. $B = -2b \Rightarrow -2b = -8 \Rightarrow b = 4$

♦. $C = -2c \Rightarrow -2c = -12 \Rightarrow c = 6$

♦. $D = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 \Rightarrow 68 = 5^2 + 4^2 + 6^2 - R^2$

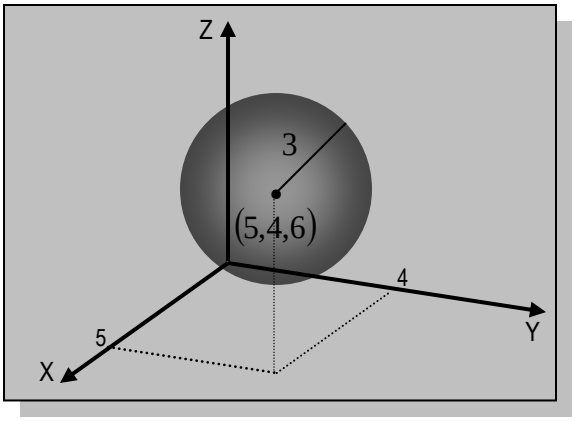
$\Rightarrow R^2 = 25 + 16 + 36 - 68$

$\Rightarrow R^2 = 9$

$\Rightarrow R = 3$

Sehingga diperoleh kesimpulan bola tersebut mempunyai titik pusat di titik $(5,4,6)$ dengan jari-jari $R = 3$

Grafiknya seperti Gambar 4.6



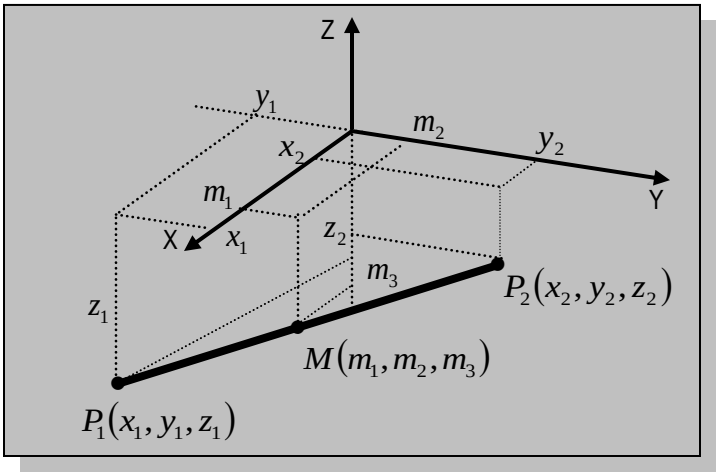
Gambar 4.6. Bola dengan pusat (5,4,6) dan R=3

4.1.3. Titik Tengah

Hal lain yang berkaitan dengan jarak antara dua titik adalah titik tengah, misalkan diketahui dua titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ yang masing-masing merupakan titik ujung dari sebuah garis, jika titik tengah dari garis tersebut dituliskan sebagai $M(m_1, m_2, m_3)$ dimana m_1, m_2 dan m_3 diperoleh dari rumus :

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad m_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Jika kita gambar, maka seperti Gambar 4.7



Gambar 4.7. Titik tengah pada suatu Garis

Contoh 4.8 :

Tentukan titik tengah antara titik $P_1(2,4,-2)$ dan titi $P_2(6,-4,-8)$

Penyelesaian 4.8 :

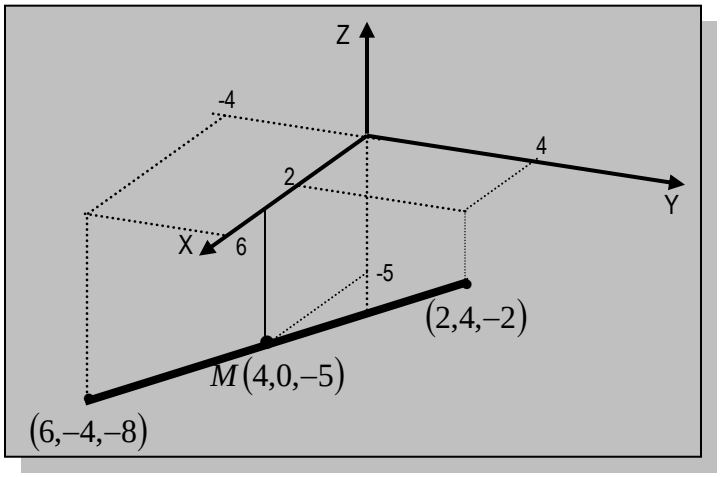
Diketahui titik $P_1(2,4,-2)$ dan titik $P_2(6,-4,-8)$ maka koordinattitik tengahnya adalah $M(m_1, m_2, m_3)$ dimana :

♦. $m_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

♦. $m_2 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \dfrac{4+(-4)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

♦. $m_3 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_3 = \dfrac{-2+(-8)}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$

Sehingga titik tengah mempunyai koordinat $M(4,0,-5)$, jika kitagambarkan seperti pada Gambar 4.8



Gambar 4.8. Titik tengah pada suatu Garis

Contoh 4.9 :

Tentukan persamaan bola yang pusatnya merupakan titik tengah dari suatu garis yang dibentuk dari dua titik $P_1(-1,2,3)$ dan titik $P_2(5,-2,7)$

Penyelesaian 4.9 :

Persoalan yang kita hadapi adalah pusat bola belum diketahui, jari-jari belum diketahui, maka langkah pertama adalah menentukan pusat bola dan jari-jari.

♦. Koordinat Titik tengah antara titik $P_1(-1,2,3)$ dan titik $P_2(5,-2,7)$ adalah $M(m_1,m_2,m_3)$ dimana :

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$m_3 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_3 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Jadi titik tengahnya $M(2,0,5)$ dan titik tengah ini merupakan titik pusat bola

♦. Jari-jari bola adalah jarak titik tengah $M(2,0,5)$ ke titik $P_1(-1,2,3)$ yaitu $|P_1M|$ atau jarak titik $M(2,0,5)$ ke titik $P_2(5,-2,7)$ yaitu $|P_2M|$

$\Rightarrow |P_1M| = \sqrt{(m_1 - x_1)^2 + (m_2 - y_1)^2 + (m_3 - z_1)^2}$

$\Rightarrow |P_1M| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-2)^2 + (5-3)^2}$

$\Rightarrow |P_1M| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$

$\Rightarrow |P_1M| = \sqrt{9+4+4}$

$\Rightarrow |P_1M| = \sqrt{17}$

Sehingga persamaan bola yang dimaksud adalah :

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-5)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 17$

Atau dalam bentuk :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10z + 12 = 0$

4.1.4. Persamaan Bidang Datar

Grafik dalam ruang dimensi tiga pada prinsipnya sama dengan grafik pada bidang dimensi dua, jika pada dimensi dua berupa garis, maka pada dimensi tiga akan berupa bidang, demikian juga jika pada dimensi dua berupa bidang, maka jika digambar pada dimensi tiga akan berupa ruang.

Persamaan linier pada ruang dimensi tiga merupakan sebuah bidang, secara umum persamaan linier dalam ruang dimensi tiga dirumuskan sebagai berikut :

$$Ax + By + Cz = D$$

dengan syarat $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

jika suatu bidang S memotong ke tiga sumbu koordinat yaitu sumbu-x, sumbu-y dan sumbu-z, maka untuk menggambar grafiknya kita tentukan titik potong pada ketiga sumbu tersebut, yaitu titik potong sumbu-x yaitu $P(x,0,0)$, titik potong sumbu-y yaitu $Q(0,y,0)$

dan titik potong sumbu-z yaitu $R(0,0,z)$, untuk menentukan nilai x, y dan z sebagai berikut :

♦. Untuk menentukan nilai x, maka kita beri nilai $y=0$ dan $z=0$

♦. Untuk menentukan nilai y, maka kita beri nilai $x=0$ dan $z=0$

♦. Untuk menentukan nilai z, maka kita beri nilai $x=0$ dan $y=0$

Sehingga akan diperoleh ketiga titik potong yaitu $P(x,0,0)$, $Q(0,y,0)$ dan $R(0,0,z)$

Contoh 4.10 :

Gambarkan grafik dari persamaan $3x+4y+2z=12$

Penyelesaian 4.10 :

Untuk menentukan ke tiga titik potong terhadap sumbu-sumbu koordinat, maka kita tentukan nilai-nilai x, y dan z, yaitu :

♦. Untuk menentukan nilai x, maka kita beri nilai $y=0$ dan $z=0$ dan kita substitusikan ke persamaan $3x+4y+2z=12$, maka diperoleh

$\Rightarrow 3x+4(0)+2(0)=12$

$\Rightarrow 3x+0+0=12$

$\Rightarrow 3x=12$

$\Rightarrow x=4$ sehingga titik potong sumbu-x adalah $P(4,0,0)$

♦. Untuk menentukan nilai y, maka kita beri nilai $x=0$ dan $z=0$ dan kita substitusikan ke persamaan $3x+4y+2z=12$, maka diperoleh

$\Rightarrow 3(0)+4y+2(0)=12$

$\Rightarrow 0+4y+0=12$

$\Rightarrow 4y=12$

$\Rightarrow y=3$ sehingga titik potong sumbu-y adalah $Q(0,3,0)$

♦. Untuk menentukan nilai z, maka kita beri nilai $x=0$ dan $y=0$ dan kitasubstitusikan ke persamaan $3x+4y+2z=12$, maka diperoleh

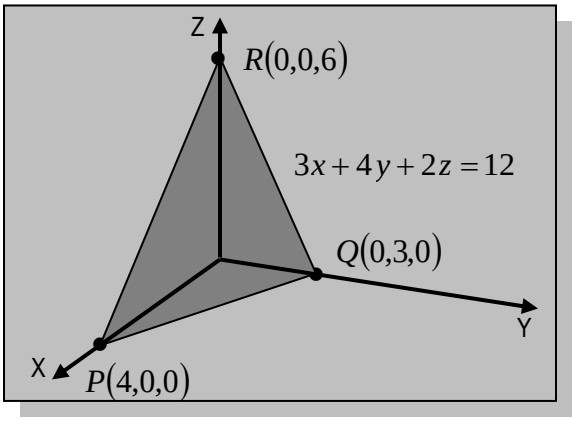
$\Rightarrow 3(0)+4(0)+2z=12$

$\Rightarrow 0+0+2z=12$

$\Rightarrow 2z = 12$

$\Rightarrow z = 6$ sehingga titik potong sumbu-z adalah $R(0,0,6)$

Sehingga kita peroleh titik-titik potong terhadap ke tiga sumbu yaitu $P(4,0,0)$, $Q(0,3,0)$ dan $R(0,0,6)$ jika kita letakkan ketiga titik tersebut pada sistem koordinat dimensi tiga, maka akan terlihat pada Gambar 4.9



Gambar 4.9. Bidang dari sebuah persamaan

Contoh 4.11 :

Gambarkan grafik dari persamaan $4x + 6y = 12$

Penyelesaian 4.11 :

Karena persamaannya $4x + 6y = 12$ dimana tidak mengandung variable z, maka grafiknya sebuah bidang yang sejajar dengan sumbu-z, artinya tidak memiliki titik potong terhadap sumbu-z, Untuk menentukan ke dua titik potong terhadap sumbu-sumbu koordinat, maka kita tentukan nilai-nilai x dan y, yaitu :

♦. Untuk menentukan nilai x, maka kita beri nilai $y = 0$ dan kita substitusikan ke persamaan $4x + 6y = 12$, maka diperoleh

$\Rightarrow 4x + 6(0) = 12$

$\Rightarrow 4x + 0 = 12$

$\Rightarrow 4x = 12$

$\Rightarrow x = 3$ sehingga titik potong sumbu-x adalah $P(3,0,0)$

♦. Untuk menentukan nilai y, maka kita beri nilai $x=0$ dan kita substitusikan ke persamaan $4x+6y=12$, maka diperoleh

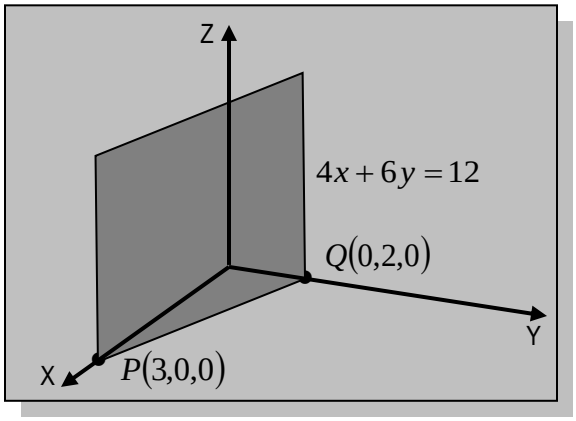
$\Rightarrow 4x+6y=12$

$\Rightarrow 4(0)+6y=12$

$\Rightarrow 6y=12$

$\Rightarrow y=2$ sehingga titik potong sumbu-y adalah $Q(0,2,0)$

Karena dalam persamaan $4x+6y=12$ tidak ada variabel z, maka berarti bidang datar tersebut sejajar dengan sumbu-z, sehingga tidak ada titik potong sumbu-z, kita hanya memperoleh titik potong terhadap sumbu-x yaitu $P(3,0,0)$, dan titik potong sumbu-y yaitu $Q(0,2,0)$ jika kita letakkan kedua titik tersebut pada sistem koordinat dimensi tiga, maka akan terlihat pada Gambar 4.10



Gambar 4.10. Bidang Sejajar Sumbu-z

Contoh 4.12 :

Gambarkan grafik dari persamaan $2x+4z=8$

Penyelesaian 4.12 :

Karena persamaannya $2x+4z=8$ dimana tidak mengandung variable y, maka grafiknya sebuah bidang yang sejajar dengan sumbu-y, artinya tidak memiliki titik potong terhadap sumbu-y,

Untuk menentukan ke dua titik potong terhadap sumbu-sumbu koordinat, maka kita tentukan nilai-nilai x dan z, yaitu :

♦. Untuk menentukan nilai x, maka kita beri nilai $z = 0$ dan kita substitusikan ke persamaan $2x + 4z = 8$, maka diperoleh

$\Rightarrow 2x + 4(0) = 8$

$\Rightarrow 2x + 0 = 8$

$\Rightarrow 2x = 8$

$\Rightarrow x = 4$ sehingga titik potong sumbu-x adalah $P(4,0,0)$

♦. Untuk menentukan nilai z, maka kita beri nilai $x = 0$ dan kita substitusikan ke persamaan $2x + 4z = 8$, maka diperoleh

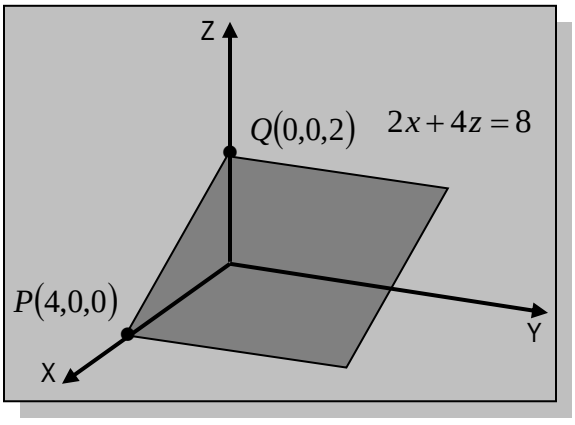
$\Rightarrow 2x + 4z = 8$

$\Rightarrow 2(0) + 4z = 8$

$\Rightarrow 4z = 8$

$\Rightarrow z = 2$ sehingga titik potong sumbu-z adalah $R(0,0,2)$

Karena dalam persamaan $2x + 4z = 8$ tidak ada variabel y, maka berarti bidang datar tersebut sejajar dengan sumbu-y, sehingga tidak ada titik potong sumbu-y, kita hanya memperoleh titik potong terhadap sumbu-x yaitu $P(4,0,0)$, dan titik potong sumbu-z yaitu $R(0,0,2)$ jika kita letakkan kedua titik tersebut pada sistem koordinat dimensi tiga, maka akan terlihat pada Gambar 4.11



Gambar 4.11. Bidang Sejajar Sumbu Y

Tugas :

1. Tuliskan persamaan bola yang titik pusatnya dan jari-jarinya sebagai berikut :
   a. $(3,1,4)$, 5
   b. $(-1,0,4)$, $\sqrt{6}$
   c. $(-6,2,-3)$, 2
   d. $(3,0,0)$, 3

2. Cari persamaan bola yang pusatnya $(2,4,5)$ dan menyinggung bidang xy

3. Tentukan pusat bola dan jari-jarinya dari persamaan bola di bawah ini
   a. $x^2+y^2+z^2-12x+14y-8z+1=0$
   b. $x^2+y^2+z^2+2x-6y-10z+34=0$
   c. $4x^2+4y^2+4z^2-4x+8y+16z-12=0$
   d. $x^2+y^2+z^2+8x-4y-22z+77=0$

4. Buatkan sketsa grafik dari persamaan yang diketahui
   a. $2x+6y+3z=12$
   b. $3x-4y+2z=24$
   c. $x+3y-z=6$
   d. $-3x+2y+z=6$

5. Tentukan persamaan bola yang mempunyai ruas garis yang menghubungkan titi $(-2,3,6)$ dan $(4,-1,5)$ sebagai garis tengah