Bab 4
Aplikasi Eliminasi Gauss pada Masalah Inversi

Objektif :
⊲ Mengenalkan model garis.
⊲ Mengenalkan model parabola.
⊲ Mengenalkan model bidang.

Pada bab ini, saya mencoba menuliskan aplikasi Metode Eliminasi Gauss sebagai dasar-dasar teknik inversi yaitu meliputi model garis, model parabola dan model bidang. Uraian aplikasi tersebut diawali dari ketersediaan data observasi, lalu sejumlah parameter model mesti dicari dengan teknik inversi. Mari kita mulai dari model garis.

4.1 Inversi Model Garis

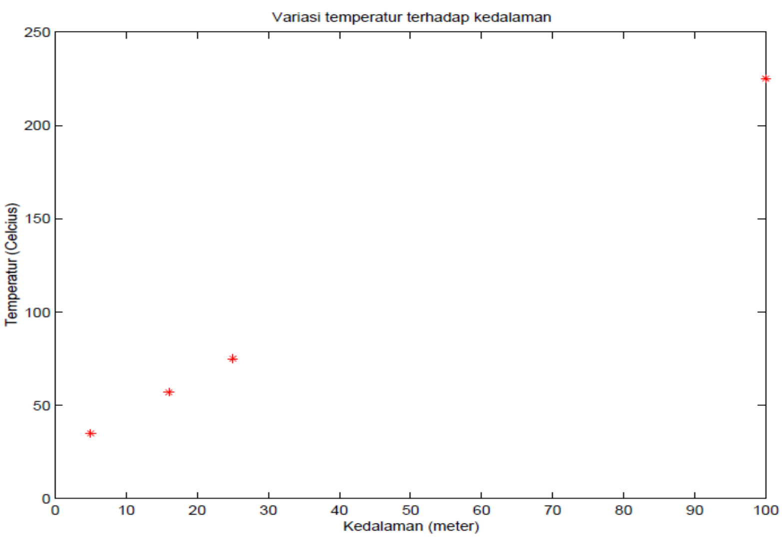
Pengukuran suhu terhadap kedalaman di bawah permukaan bumi menunjukkan bahwa semakin dalam, suhu semakin tinggi. Misalnya telah dilakukan sebanyak empat kali ($N = 4$) pengukuran suhu (T_i) pada kedalaman yang berbeda beda (z_i). Tabel pengukuran secara sederhana disajikan seperti ini:

Tabel 4.1: Data suhu bawah permukaan tanah terhadap kedalaman

Pengukuran ke-i	Kedalaman (m)	suhu (^OC)
1	$z_1 = 5$	$T_1 = 35$
2	$z_2 = 16$	$T_2 = 57$
3	$z_3 = 25$	$T_3 = 75$
4	$z_4 = 100$	$T_4 = 225$

Grafik sebaran data observasi ditampilkan pada Gambar (4.2). Lalu kita berasumsi bahwa variasi suhu terhadap kedalaman ditentukan oleh rumus berikut ini:

$$m_1 + m_2 z_i = T_i \tag{4.1}$$



Gambar 4.1: Sebaran data observasi antara suhu dan kedalaman

Dimana m_1 dan m_2 adalah konstanta-konstanta yang akan dicari. Rumus di atas disebut **model matematika**. Sedangkan m_1 dan m_2 disebut **parametermodel**. Padamodelmatematika di atas terdapat dua buah parameter model, ($M = 2$). Sementara jumlah data observasi ada empat, ($N = 4$), yaitu nilai-nilai kedalaman, z_i, dan suhu, T_i. Berdasarkan model tersebut, kita bisa menyatakan suhu dan kedalaman masing-masing sebagai berikut:

$$m1 + m2z1 = T1$$
$$m1 + m2z2 = T2$$
$$m1 + m2z3 = T3$$
$$m1 + m2z4 = T4$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Lalu ditulis secara singkat

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d} \tag{4.3}$$

dimana **d** adalah data yang dinyatakan dalam vektor kolom, **m** adalah model parameter, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan G disebut **matrik kernel**. Lantas bagaimana cara menda patkan nilai m_1 dan m_2 pada vektor kolom **m**? Manipulasi berikut ini bisa menjawabnya

$$G^T G\mathbf{m} = G^T\mathbf{d} \tag{4.4}$$

dimana t disini maksudnya adalah tanda transpos matrik. Selanjutnya, untuk mendapatkan elemen-elemen **m**, diperlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini:

1. Tentukan transpos dari matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan G^tG

$$G^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 \end{bmatrix}$$

dimana $N = 4$ dan $i = 1, 2, 3, 4$.

3. Kemudian tentukan pula G^td

$$G^t\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang persamaan (4.4) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

5. Aplikasikan metode **Eliminasi Gauss dengan Substitusi Mundur**. Untuk itu, tentukan matrik augment-nya

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i & | & \sum T_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & | & \sum z_i T_i \end{bmatrix}$$

6. Untuk mempermudah perhitungan, kita masukan dulu angka-angka yang tertera pada tabel pengukuran dihalaman depan.

$$\begin{bmatrix} 4 & 146 & | & 392 \\ 146 & 10906 & | & 25462 \end{bmatrix}$$

7. Lakukan proses triangularisasi dengan operasi ($P_2 -$ (36, 5)P_1) $\rightarrow$ P_2. Saya sertakan pula indeks masing-masing elemen pada matrik augment sebagaimana yang telah saya lakukan pada catatan kuliah yang berjudul **Metode Eliminasi Gauss**. Hasilnya adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 146 & | & 392 \\ 0 & 5577 & | & 11154 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & | & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & | & a_{23} \end{bmatrix}$$

8. Terakhir, tentukan konstanta m_1 dan m_2 yang merupakan elemen-elemen vektor kolom **m**, dengan proses substitusi mundur. Pertama tentukan m_2

$$m_2 = \frac{a_{23}}{a_{22}} = \frac{11154}{5577} = 2$$

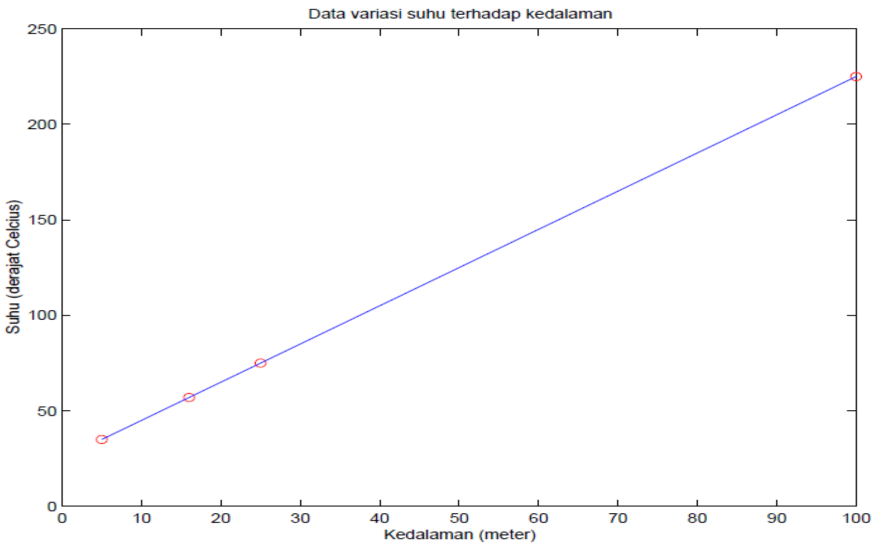
lalu tentukan m_1

$$m_1 = \frac{a_{13} - a_{12}m_2}{a_{11}} = \frac{392 - (146)(2)}{4} = 25$$

4.1.1 Script matlab inversi model garis

Script inversi model garis ini dibangun dari beberapa script yang sudah kita pelajari sebelumnya, yaitu script transpose matriks, perkalian matrik dan script eliminasi gauss. Silakan pelajari maksud tiap-tiap baris pada script ini.

```
clc
clear all
close all
% ---- data observasi ----
N = 4; % jumlah data
z = [ 5 ; 16 ; 25 ; 100 ];
T = [ 35 ; 57 ; 75 ; 225 ];

% ---- menentukan matrik kernel, G ----
for i = 1:N
G(i,1) = 1;
G(i,2) = z(i,1);
end

% ---- menentukan vektor d ----
d=T;

% ---- proses inversi ----
A = G’*G;
b = G’*d;
m = elgauss(A,b);

%-------MENGGAMBAR GRAFIK----------------------
plot(z,T,’ro’);
xlabel(’Kedalaman (meter)’);ylabel(’Suhu (derajat Celcius)’);
title(’Data variasi suhu terhadap kedalaman’)
hold on;
for i=1:max(z)
zi(i)=i;
Ti(i)=m(1)+m(2)*zi(i);
end
plot(zi,Ti);
hold off;
```



Gambar 4.2: Kurva hasil inversi data observasi antara suhu dan kedalaman

Demikianlah contoh aplikasi metode Eliminasi Gauss pada model garis. Anda bisa mengaplikasikan pada kasus lain, dengan syarat kasus yang anda tangani memiliki bentuk model yang sama dengan yang telah dikerjakan pada catatan ini, yaitu **model persamaan garis** atau disingkat **model garis**: $y = m1 + m2x$. Selanjutnya mari kita pelajari inversi model parabola.

4.2 Inversi Model Parabola

Pengukuran suhu terhadap kedalaman di bawah permukaan bumi menunjukkan bahwa semakin dalam, suhu semakin tinggi. Misalnya telah dilakukan sebanyak delapan kali ($N = 8$) pengukuran suhu (T_i) pada kedalaman yang berbeda beda (z_i). Tabel 4.2 menyajikan data observasi pada kasus ini. Lalu kita berasumsi bahwa variasi suhu terhadap kedalaman ditentukan oleh rumus berikut ini:

$$m_1 + m_2 z_i + m_3 z_i^2 = T_i \tag{4.6}$$

Tabel 4.2: Data suhu bawah permukaan tanah terhadap kedalaman

Pengukuran ke-i	Kedalaman (m)	suhu (^OC)
1	$z_1 = 5$	$T_1 = 21,75$
2	$z_2 = 8$	$T_2 = 22,68$
3	$z_3 = 14$	$T_3 = 25,62$
4	$z_4 = 21$	$T_4 = 30,87$
5	$z_5 = 30$	$T_5 = 40,5$
6	$z_6 = 36$	$T_6 = 48,72$
7	$z_7 = 45$	$T_7 = 63,75$
8	$z_8 = 60$	$T_8 = 96$

dimana m_1, m_2 dan m_3 adalah konstanta-konstanta yang akan dicari. Rumus di atas disebut **model**. Sedangkan m_1, m_2 dan m_3 disebut **model parameter**. Jadi pada model di atas terdapat tiga buah model parameter, ($M = 3$). Adapun yang berlaku sebagai **data** adalah nilai-nilai suhu T_1, T_2,..., dan T_8. Berdasarkanmodel tersebut, kita bisa menyatakan suhu dan kedalaman masing-masing sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
m_1 + m_2 z_1 + m_3 z_1^2 &= T_1 \\
m_1 + m_2 z_2 + m_3 z_2^2 &= T_2 \\
m_1 + m_2 z_3 + m_3 z_3^2 &= T_3 \\
m_1 + m_2 z_4 + m_3 z_4^2 &= T_4 \\
m_1 + m_2 z_5 + m_3 z_5^2 &= T_5 \\
m_1 + m_2 z_6 + m_3 z_6^2 &= T_6 \\
m_1 + m_2 z_7 + m_3 z_7^2 &= T_7 \\
m_1 + m_2 z_8 + m_3 z_8^2 &= T_8
\end{aligned}$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Lalu ditulis secara singkat

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d} \tag{4.8}$$

dimana **d** adalah data yang dinyatakan dalam vektor kolom, **m** adalah model parameter, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan G disebut **matrik kernel**. Lantas bagaimana cara mendapatkan nilai m_1, m_2 dan m_3 pada vektor kolom **m**? Manipulasi berikut ini bisa menjawabnya

$$G^t G\mathbf{m} = G^t\mathbf{d} \tag{4.9}$$

dimana t disini maksudnya adalah tanda transpos matrik. Selanjutnya, untuk mendapatkan elemen-elemen **m**, diperlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini:

1. Tentukan transpos dari matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan G^tG

$$G^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}$$

dimana N = 8 dan i = 1, 2, 3, . . . , 8.

3. Kemudian tentukan pula G^td

$$G^t\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 T_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang persamaan (4.14) dapat dinyatakan sebagai (ini khan **least square** juga...!?)

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 T_i \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

5. Aplikasikan metode **Eliminasi Gauss dengan Substitusi Mundur**. Untuk itu, tentukan matrik augment-nya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} N & \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum T_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 & \sum z_i^2 T_i \end{array}\right]$$

6. Untuk mempermudah perhitungan, kita masukan dulu angka-angka yang tertera pada tabel pengukuran dihalaman depan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 219 & 8547 & 349,89 \\ 219 & 8547 & 393423 & 12894,81 \\ 8547 & 393423 & 19787859 & 594915,33 \end{array}\right]$$

7. Lakukan proses triangularisasi dengan operasi ($P_2 -$ (219/8)P_1) $\rightarrow$ P_2. Hasilnya adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 219 & 8547 & 349,89 \\ 0 & 2551,88 & 159448,88 & 3316,57 \\ 8547 & 393423 & 19787859 & 594915,33 \end{array}\right]$$

8. Masih dalam proses triangularisai, operasi berikutnya ($P_3 -$(8547/8)P_1) $\rightarrow$ P_3. Hasilnya adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 219 & 8547 & 349,89 \\ 0 & 2551,88 & 159448,88 & 3316,57 \\ 0 & 159448.88 & 10656457,88 & 221101,6 \end{array}\right]$$

9. Masih dalam proses triangularisai, operasi berikutnya ($P_3 -$ (159448, 88/2551, 88)P_2) $\rightarrow$ P_3. Hasilnya adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 219 & 8547 & 349,89 \\ 0 & 2551,88 & 159448,88 & 3316,57 \\ 0 & 0 & 693609,48 & 13872,19 \end{array}\right] \quad (4.11)$$

Seperti catatan yang lalu, saya ingin menyertakan pula notasi masing-masing elemen pada matrik augment sebelum melakukan proses substitusi mundur.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 219 & 8547 & 349,89 \\ 0 & 2551,88 & 159448,88 & 3316,57 \\ 0 & 0 & 693609,48 & 13872,19 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

10. Terakhir, tentukan konstanta m_1, m_2 dan m_3 yang merupakan elemen-elemen vektor kolom **m**, dengan proses substitusi mundur. Pertama tentukan m_3

$$m_3 = \frac{a_{34}}{a_{33}} = \frac{13872,19}{693609,48} = 0,02$$

lalu m_2

$$m_2 = \frac{a_{24} - a_{23}m_3}{a_{22}} = \frac{3316,57 - (159448,88)(0,02)}{2551,88} = 0,05$$

dan m_1

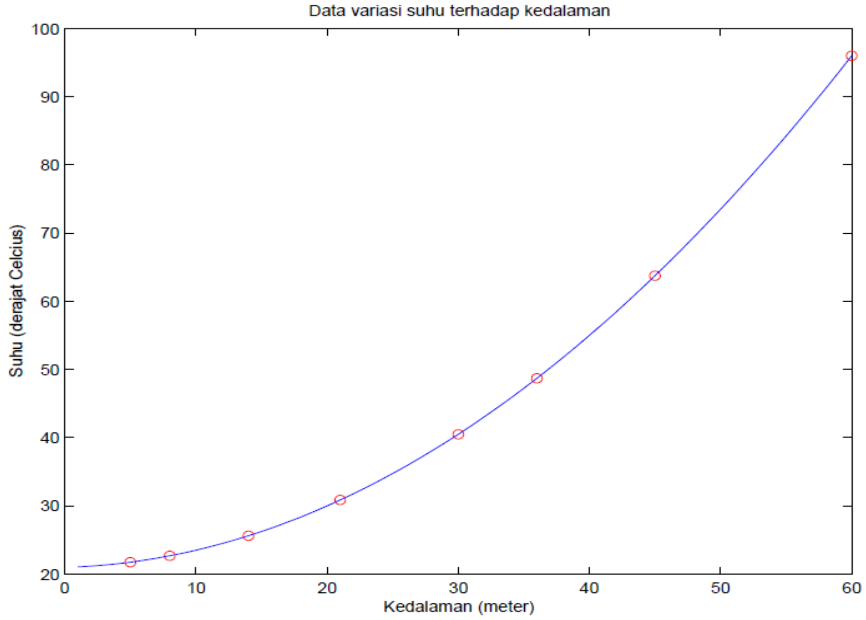
$$m_1 = \frac{a_{14} - (a_{12}m_2 + a_{13}m_3)}{a_{11}} = \frac{349,89 - [(219)(0,05) + (8547)(0,02)]}{8} = 21$$

4.2.1 Script matlab inversi model parabola

Perbedaan utama script ini dengan script inversi model garis terletak pada inisialisasi elemen-elemen matrik kernel. Elemen-elemen matrik kernel sangat ditentukan oleh model matematika yang digunakan. Seperti pada script ini, matrik kernelnya diperoleh dari model parabola.

```
clc
clear all
close all

% ---- data observasi ----
N = 8; % Jumlah data
z = [5; 8; 14; 21; 30; 36; 45; 60];
T = [21.75; 22.68; 25.62; 30.87; 40.5; 48.72; 63.75; 96];

% ---- menentukan matrik kernel, G ----
for i = 1:N
G(i,1) = 1;
G(i,2) = z(i,1);
G(i,3) = z(i,1)^2;
end

% ---- menentukan vektor d ----
d=T;

% ---- proses inversi ----
A = G'*G;
b = G'*d;
m = elgauss(A,b);

%-------MENGGAMBAR GRAFIK----------------------
plot(z,T,'ro');
xlabel('Kedalaman (meter)');ylabel('Suhu (derajat Celcius)');
title('Data variasi suhu terhadap kedalaman');
hold on;
for i=1:max(z)
zi(i)=i;
Ti(i)=m(1)+m(2)*zi(i)+m(3)*zi(i)^2;
```

```
end
plot(zi,Ti);
hold off;
m
```



Gambar 4.3: Kurva hasil inversi data observasi antara suhu dan kedalaman

Demikianlah contoh aplikasi metode Eliminasi Gauss pada model parabola. Anda bisa mengaplikasikan pada kasus lain, dengan syarat kasus yang anda tangani memiliki bentuk **model** yang sama dengan yang telah dikerjakan pada catatan ini, yaitu memiliki tiga buah model parameter yang tidak diketahui dalam bentuk persamaan parabola: $y = m_1 + m_2x + m_3x^2$. Pada catatan berikutnya, saya akan membahas model yang mengandung tiga model parameter dalam 2 dimensi.

13 Juli 2020