4.3 Inversi Model Bidang

Dalam catatan ini saya belum sempat mencari contoh pengukuran yang sesuai untuk model 2-dimensi. Maka, saya ingin langsung sajamengajukan sebuahmodel untuk 2-dimensi berikut ini:

$$m_1 + m_2 x_i + m_3 y_i = d_i \tag{4.12}$$

dimana m_1, m_2 dan m_3 merupakan model parameter yang akan dicari. Adapun yang berlaku sebagai **data** adalah d_1, d_2, d_3, $\ldots$, d_i. Berdasarkan model tersebut, kita bisa menyatakan suhu dan kedalaman masing-masing sebagai berikut:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 x_1 + m_3 y_1 &= d_1 \\ m_1 + m_2 x_2 + m_3 y_2 &= d_2 \\ m_1 + m_2 x_3 + m_3 y_3 &= d_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ m_1 + m_2 x_N + m_3 y_N &= d_N \end{aligned}$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

Lalu ditulis secara singkat

$$G\mathrm{m} = \mathrm{d} \tag{4.13}$$

dimana **d** adalah data yang dinyatakan dalam vektor kolom, **m** adalah model parameter, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan G disebut **matrik kernel**. Lantas bagaimana cara mendapatkan nilai m_1, m_2 dan m_3 pada vektor kolom **m**? Manipulasi berikut ini bisa menjawabnya

$$G^t G\mathrm{m} = G^t \mathrm{d} \tag{4.14}$$

dimana t disini maksudnya adalah tanda transpos matrik. Selanjutnya, untuk mendapatkan elemen-elemen **m**, diperlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini:

1. Tentukan transpos dari matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$

2. Tentukan G^tG

$$G^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix}$$

dimana N = jumlah data. dan i = 1, 2, 3, . . . , N.

3. Kemudian tentukan pula G^td

$$G^t\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum x_i d_i \\ \sum y_i d_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang, persamaan (4.14) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum x_i d_i \\ \sum y_i d_i \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

5. Aplikasikan metode **Eliminasi Gauss dengan Substitusi Mundur**. Untuk itu, tentukan matrik augment-nya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} N & \sum x_i & \sum y_i & \sum d_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i d_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i d_i \end{array}\right]$$

6. Langkah-langkah selanjutnya akan sama persis dengan catatan sebelumnya (**model linear** dan **model parabola**)

Anda bisa mengaplikasikan data pengukuran yang anda miliki, dengan syarat kasus yang anda tangani memiliki bentuk **model** yang sama dengan yang telah dikerjakan pada catatan ini, yaitu memiliki tiga buah model parameter yang tidak diketahui dalam bentuk persamaan bidang (atau 2-dimensi): d = m_1 + m_2x + m_3y.

Saya cukupkan sementara sampai disini. Mari kita lihat contoh aplikasinya langsung.

4.4 Contoh aplikasi

4.4.1 Menghitung gravitasi di planet X

Seorang astronot tiba di suatu planet yang tidak dikenal. Setibanya disana, ia segera mengeluarkan kamera otomatis, lalu melakukan ekperimen kinematika yaitu dengan melempar batu vertikal ke atas. Hasil foto-foto yang terekam dalam kamera otomatis adalah sebagai berikut Plot data pengukuran waktu vs ketinggian diperlihatkan pada Gambar 4.4. Anda diminta untuk membantu proses pengolahan data sehingga diperoleh nilai konstanta gravitasi di planet tersebut dan kecepatan awal batu. Jelas, ini adalah persoalan inversi, yaitu mencari *unkown parameter* (konstanta gravitasi dan kecepatan awal batu) dari data observasi (hasil foto gerak sebuah batu)

Tabel 4.3: Data ketinggian terhadap waktu dari planet X

Waktu (dt)	Ketinggian (m)	Waktu (dt)	Ketinggian (m)
0,00	5,00	2,75	7,62
0,25	5,75	3,00	7,25
0,50	6,40	3,25	6,77
0,75	6,94	3,50	6,20
1,00	7,38	3,75	5,52
1,25	7,72	4,00	4,73
1,50	7,96	4,25	3,85
1,75	8,10	4,50	2,86
2,00	8,13	4,75	1,77
2,25	8,07	5,00	0,58
2,50	7,90		

Langkah awal untuk memecahkan persoalan ini adalah dengan mengajukan asumsi model matematika, yang digali dari konsep-konsep fisika, yang kira-kira paling cocok dengan situasi pengambilan data observasi. Salah satu konsep dari fisika yang bisa diajukan adalah konsep tentang Gerak-Lurus-Berubah-Beraturan (GLBB), yang formulasinya seperti ini

$$h_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

Berdasarkan tabel data observasi, ketinggian pada saat t = 0 adalah 5 m. Itu artinya h_o = 5 m. Sehingga model matematika (formulasi GLBB) dapat dimodifikasi sedikit menjadi

$$v_o t - \frac{1}{2} g t^2 = h - h_o \tag{4.16}$$

Selanjut, didefinisikan m_1 dan m_2 sebagai berikut

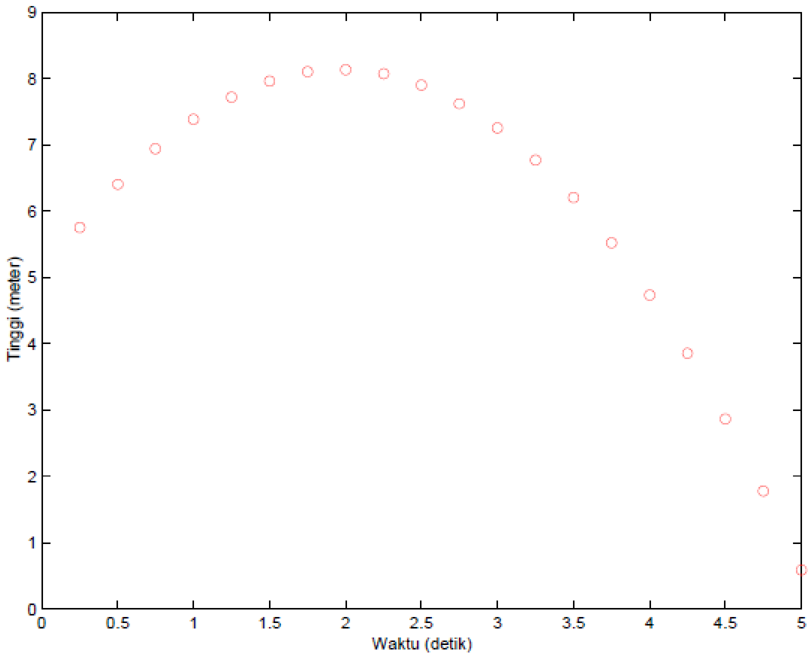
$$m_1 = v_o \qquad m_2 = -\frac{1}{2} g \tag{4.17}$$

sehingga persamaan model GLBB menjadi

$$m_1 t_i + m_2 t_i^2 = h_i - 5 \tag{4.18}$$

dimana i menunjukkan data ke-i.

Langkah berikutnya adalah menentukan nilai tiap-tiap elemen matrik kernel, yaitu dengan



Gambar 4.4: Grafik data pengukuran gerak batu

memasukan data observasi kedalam model matematika (persamaan (4.18))

$$\begin{aligned} m_1t_1 + m_2t_1^2 &= h_1 - 5 \\ m_1t_2 + m_2t_2^2 &= h_2 - 5 \\ m_1t_3 + m_2t_3^2 &= h_3 - 5 \\ \vdots \quad \vdots \quad &= \vdots \\ m_1t_{20} + m_2t_{20}^2 &= h_{20} - 5 \end{aligned}$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - 5 \\ h_2 - 5 \\ h_3 - 5 \\ \vdots \\ h_{19} - 5 \\ h_{20} - 5 \end{bmatrix}$$

Operasi matrik di atas memenuhi persamaan matrik

$$Gm = d$$

Seperti yang sudah dipelajari pada bab ini, penyelesaian masalah inversi dimulai dari proses manipulasi persamaan matrik sehingga perkalian antara G^t dan G menghasilkan matriks bujursangkar

$$G^tG\mathbf{m} = G^t\mathbf{d} \tag{8.19}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan m_1 dan m_2, prosedur inversi dilakukan satu-per-satu

1. Menentukan transpos matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \ldots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \ldots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan G^tG

$$G^t G = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \ldots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \ldots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix}$$

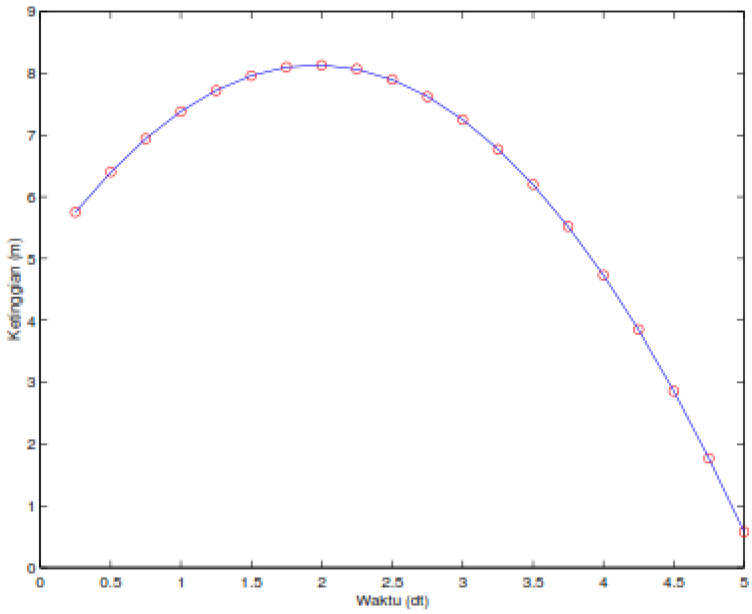
dimana N = 20 dan i = 1, 2, ..., N.

3. Kemudian menentukan hasil perkalian G^td

$$G^t \mathbf{d} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \ldots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \ldots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \vdots \\ h_{19} \\ h_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang persamaan (8.19) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix} \qquad (8.20)$$



Gambar 8.5: Grafik hasil inversi parabola

Berdasarkan data observasi, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 179,4 & 689,1 \\ 689,1 & 2822,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 273,7 \\ 796,3 \end{bmatrix}$$

Hasil inversinya adalah nilai kecepatan awal yaitu saat batu dilempar ke atas adalah sebesar m1=v0 =3,2009 m/dt. Adapun percepatan gravitasi diperoleh dari m2 dimana m2 = -1/2g =-0,8169; maka disimpulkan nilai g adalah sebesar 1,6338 m/dt

Gambar 8.5 memperlihatkan kurva hasil inversi berserta sebaran titik data observasi. Garis berwarna biru merupakan garis kurva *fitting* hasil inversi parabola. Sedangkan bulatan berwarna merah adalah data pengukuran ketinggian (m) terhadap waktu (dt). Jelas terlihat bahwa garis kurva berwarna biru benar-benar cocok melewati semua titik data pengukuran. Ini menunjukkan tingkat akurasi yang sangat tinggi. Sehingga nilai kecepatan awal dan gravitasi hasil inversi cukup valid untuk menjelaskan gerak batu di planet X.

Berikut adalah script inversi dalam Matlab untuk memecahkan masalah ini

```
clc
clear all
close all

% ---- data observasi ----
N = 20;      % jumlah data
for i=1:N
   t(i)=i*0.25;
end
h = [5.75;6.40;6.94;7.38;7.72;7.96;8.10;8.13;8.07;
   7.90;7.62;7.25;6.77;6.20;5.52;4.73;3.85;2.86;1.77;0.58];

% ---- menentukan matrik kernel, G ----
for i=1:N
   G(i,1)=t(i);
   G(i,2)=t(i)^2;
end

% ---- menentukan vektor d ----
for i=1:N
   d(i,1)=h(i)-5;
end

% ---- proses inversi ----
A = G'*G;
b = G'*d;
m = elgauss(A,b);

%-------MENGGAMBAR GRAFIK----------------------
plot(t,h,'ro');
xlabel('Waktu (detik)');ylabel('ketinggian (meter)');
title('Data variasi waktu terhadap ketinggian')
hold on;
for i=1:N
   hi(i)=m(1)*t(i)+m(2)*t(i)^2+5;
end
plot(t,hi);
hold off;
```